



Dynamique hamiltonienne et phénomènes de relaxation: d'un modèle champ moyen au confinement magnétique

Wahb Ettoumi

► To cite this version:

Wahb Ettoumi. Dynamique hamiltonienne et phénomènes de relaxation: d'un modèle champ moyen au confinement magnétique. Physique Classique [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2013. Français. NNT: . tel-00925491

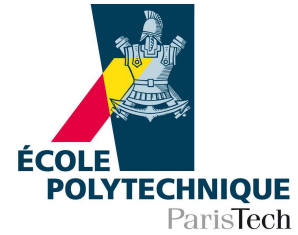
HAL Id: tel-00925491

<https://theses.hal.science/tel-00925491>

Submitted on 8 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire de Physique des Plasmas

École Polytechnique

Thèse de doctorat
Spécialité : **Physique Théorique**

**Dynamique hamiltonienne et phénomènes de relaxation : d'un
modèle champ moyen au confinement magnétique**

présentée par Wahb ETTOUMI
pour obtenir le grade de Docteur de l'École Polytechnique
Thèse préparée sous la direction de Marie-Christine FIRPO

Soutenue le 30 Septembre 2013 devant le jury composé de :

Dr. Thierry DAUXOIS
Dr. Xavier LEONCINI
Pr. Boris WEYSSOW
Pr. Frédéric VAN-WIJLAND
Dr. Marie-Christine FIRPO
Pr. Jean-Marcel RAX

Dynamique hamiltonienne et phénomènes de relaxation : d'un modèle champ moyen au confinement magnétique

Résumé :

Dans cette thèse, nous commençons par étudier un modèle hamiltonien à champ moyen, dont les propriétés statistiques d'équilibre sont exactement solubles, et permettent en outre de prédire le comportement asymptotique des réalisations temporelles du système. Nous nous intéressons aux propriétés de relaxation vers des états dits d'équilibre à partir de conditions initiales particulières, et étudions en détail l'impact du nombre de particules sur les échelles temporelles en jeu. La motivation principale réside dans le fait que le modèle considéré, bien que très simple, présente une phénoménologie rappelant celle de systèmes bien plus complexes, fournissant ainsi à moindre coût un formidable terrain d'expérimentations numériques et théoriques. Nous avons obtenu une série de résultats sur les temps de relaxation du modèle en fonction du nombre de particules, confirmant d'une part les observations numériques existantes, et proposant d'autre part une nouvelle méthode d'étude d'états hors d'équilibre, basée sur l'exploration de l'espace des phases par le système.

Nous nous intéressons ensuite au problème de la diffusion de particules lourdes en tokamak, dans l'optique de comprendre comment des impuretés, en situation réelle, pourraient voyager des bords de l'enceinte de confinement vers l'axe magnétique de l'appareil pour y absorber l'énergie du plasma, rendant alors vaine toute tentative de fusion. Nous mettons à l'épreuve la théorie de diffusion stochastique dans le régime de dents de scie, en nous basant sur des simulations numériques de particules test, et montrons que la stochasticité des lignes de champ magnétique, de par la topologie du champ électrique résultant, est une condition nécessaire permettant la reproduction des résultats expérimentaux.

Mots-clefs : Hors-équilibre, Systèmes dynamiques, Plasma, Effets collectifs, Fusion magnétique

Hamiltonian dynamics and relaxation phenomena: from a mean field model to magnetic confinement

Abstract:

In this thesis, we begin by investigating a mean field hamiltonian model, exhibiting exactly solvable statistical properties, which in turn allow one to predict the asymptotical temporal behaviour of the dynamics. Starting from given initial configurations, we focus on the system's relaxation properties towards equilibrium states, and thoroughly probe the dependency of the timescales at stake here on the number of particles. The principal motivation is given by the fact that in spite of the model's simplicity, its phenomenology is reminiscent of much more complicated systems, hence providing us with a fantastic testing field for numerical and theoretical experimentations. We obtained several results tackling the interplay between the number of particles and the relaxation timescales, confirming the already existing numerical measurements as well as laying grounds for a novel approach for dealing with out-of-equilibrium states, based on a phase-space description.

We then focus on the diffusion properties of heavy particles in tokamaks, motivated by the fact that the understanding of impurity diffusion is of paramount importance in fusion physics, since these can travel from the tokamak's edges towards its magnetic axis, causing a tremendous decrease in core temperature by absorbing the plasma's energy. We test the theory of stochastic diffusion during a sawtooth instability regime by following the movement of test particles, and show that the magnetic field lines' stochasticity, because of the resulting electric field, is a necessary condition to fulfill in order to reproduce the experimental results.

Keywords: Out-of-equilibrium, Dynamical systems, Plasma, Collective effects, Magnetic confinement

Remerciements

À l'heure où j'entame la rédaction de ces lignes, ma soutenance est déjà derrière moi. C'est donc avec un certain recul que je réalise avoir passé trois ans formidables à l'X, sous la direction de Marie-Christine. Je la remercie pour la confiance qu'elle a pu m'accorder, et le calme olympien dont elle a su faire preuve face à toutes les situations que nous avons rencontrées. Nous avons partagé le même bureau pendant trois ans, sans aucun conflit. Ses remarques ont toujours été pertinentes et m'ont à chaque fois permis d'avoir un éclairage nouveau sur les problèmes que nous tentions de résoudre. Je ne mentionnerai même pas les innombrables déplacements et services qu'elle a pu me rendre durant ma thèse. Je tiens aussi à remercier chaleureusement le jury de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je remercie l'ensemble du laboratoire pour son accueil chaleureux, et tout particulièrement Cathy, Cherifa, Chantal et Catherine. Ces quatre (fantastiques) "C" ont toujours tout fait pour que je puisse effectuer mes différents séjours à l'étranger dans les meilleures conditions possibles.

De l'ENS, merci à Alexandre, Romain, Mandy, et Cédric. De grandes distances nous séparent à présent mais la perspective de vous revoir dans un autre contexte et dans vos villes respectives m'enchant. Peut-être aurons nous aussi l'occasion de publier d'autres articles ensemble, sans oublier de multiplier par deux ou trois le chiffre d'affaire de la pizzeria locale.

Merci Hartmut pour ton décalage (horaire) permanent.

Merci à Lucas, Raphaël, Kévin, Flageul, Emile, Emine, Ahmed, Samuel, John, Jules, Mathieu pour le ski, les double-doubles, et autres *déglingueries* internationales.

Merci à Alex et l'ensemble du club d'aviron non seulement pour leur humanité et générosité, mais aussi pour toutes les compétitions passées ensemble et les milliers de kilomètres parcourus sur le lac, la Seine, la Méditerranée, l'Atlantique, la Meuse, la Loire, le canal du midi, le lac Nahuel Huapi et la rivière Waikato. Merci à Simon, Arthur, Evgeny, Benoît avec qui j'ai eu le plaisir de partager un quatre de couple très agréable, et parfois même compétitif! Olivier, Patrice, Denis, Phil, ... Merci aussi à Lorenzo pour ses précieux conseils.

Merci à tous les grenoblois, à mes parents et ma sœur pour leur aide et soutien indéfectible.

Louise, *muito obrigado por tudo*.

Table des matières

I	Dynamique temporelle et nombre de particules	3
1	Un premier regard sur le modèle HMF	9
1.1	Systèmes à interactions à longue portée	9
1.2	Approche champ moyen	10
1.3	Propriétés d'équilibre	11
1.3.1	Point de vue statistique	11
1.3.2	Hamiltonien à une particule	15
1.3.3	Variables action-angle	17
1.4	Théorie de Vlasov associée	17
1.4.1	Équation de Vlasov	17
1.4.2	Solutions stationnaires et stabilité linéaire	19
1.5	Effets de N fini	22
1.5.1	Limite de validité de l'équation de Vlasov	22
1.5.2	Etude des fluctuations d'ensemble	23
2	Instabilités linéaires et relaxation violente	27
2.1	Motivations	27
2.2	Théorie linéaire exacte à N fini	28
2.2.1	Méthode générale	28
2.2.2	Un premier calcul à N fini	29
2.2.3	Le cas “quiet start”	30
2.2.4	Du quiet start au bi-cluster déterministe	32
2.3	Extension aux configurations initiales aléatoires	33
2.3.1	Bi-cluster aléatoire	35
2.3.2	Bi-cluster gaussien	36
2.4	Calcul des taux de croissance : approche continue	37
2.5	Critère de saturation non-linéaire	40
2.5.1	Concept de relaxation violente	40
2.5.2	De l'instabilité linéaire à la relaxation violente	42
2.5.3	Application au cas faisceau froid	43

3 États QSS d'aimantation macroscopique	45
3.1 De l'importance des conditions initiales	45
3.2 Indicateurs de thermalisation	50
3.2.1 L'intégrale de corrélation	50
3.2.2 Le rôle des séparatrices	53
3.2.3 Un premier indicateur de thermalisation fiable	54
3.3 Modélisation stochastique de l'aimantation	56
3.3.1 Le développement de Kramers-Moyal	56
3.3.2 Subtilités dues au bruit multiplicatif	57
3.3.3 Caractérisation statistique du champ moyen	59
3.3.4 Première application au HMF	60
3.3.5 Résultats	62
3.3.6 Remarques sur l'équilibre	64
4 Un QSS particulier...	67
4.1 Introduction	67
4.2 Réflexion sur l'ergodicité	70
4.2.1 Ergodicité et postulat fondamental	70
4.2.2 Équation de Liouville	72
4.2.3 Systèmes mélangeants	73
4.2.4 Interprétation des états QSS	74
4.3 Modélisation stochastique des trajectoires	75
4.3.1 Développement perturbatif	75
4.3.2 Principe général	77
4.3.3 Mesure numérique du coefficient de diffusion	78
4.3.4 Le cas problématique "1.7"	80
4.3.5 Temps de premier passage	83
4.3.6 Comparaison avec la simulation numérique	85
4.3.7 Note sur l'établissement du QSS	85
4.4 Discussion générale	88
II Transport dans un effondrement de dents de scie	91
5 Principe d'un tokamak	97
5.1 La fusion par confinement magnétique	97
5.1.1 Réactions nucléaires et critère d'ignition	97
5.1.2 La configuration magnétique "tokamak"	99
5.2 Formalisme hamiltonien	101
5.2.1 Coordonnées de flux	101
5.2.2 Perturbations magnétiques	103
5.3 Équilibre magnétohydrodynamique	105
5.3.1 Équation de Grad-Shafranov	105
5.3.2 Solution perturbative	106

6	Diffusion d'ions Nickel	109
6.1	Remise en question du transport stochastique	109
6.1.1	Le régime dents de scie	109
6.1.2	Expérience dédiée	112
6.2	Étude numérique	113
6.2.1	Modèle empirique des dents de scie	113
6.2.2	Comparaison intégrable-stochastique	115
6.2.3	Effets d'amplitude	121
6.2.4	Vitesse de dérive	122
6.3	Conclusion	123
	Annexe A Schéma numérique d'intégration du HMF	125
	Annexe B Relation entre fluctuations microcanoniques et canoniques	127
	Annexe C Calcul du temps moyen de premier passage	131
	Annexe D Expression des champs perturbés	133
	Bibliographie	135
	Publications	143

Première partie

Dynamique temporelle et nombre de particules

Introduction

Ludwig Boltzmann écrivait en 1903 dans son *Über die prinzipien der Mechanik* que “Le dieu par la grâce duquel règnent les rois est la loi fondamentale de la mécanique” [1]. Partisan convaincu de la vision du monde selon Démocrite, il s’oppose violemment aux critiques des physiciens “énergétistes” et anti-atomistes de son temps tels que Georg Helm, Wilhelm Ostwald, ou encore Marcellin Berthelot, qui voyaient à travers les travaux de Maxwell, pourtant atomiste, l’illustration d’une nature continue de la matière. Il faudra patienter deux ans après la mort de Boltzmann, en 1908, pour que les travaux théoriques d’Einstein [2–4] soient confirmés expérimentalement par Jean Perrin [5, 6], mettant ainsi fin à un siècle de débat sur la réalité physique de l’atome, et permettant finalement à la théorie cinétique de Boltzmann de s’imposer. Outre la controverse au sujet de l’hypothèse atomistique sur laquelle s’appuie l’équation portant son nom, le problème de l’émergence de l’irréversibilité observée dans les systèmes réels à partir d’équations du mouvement invariantes par renversement du temps a donné lieu à plus de trente années de débats virulents [7–11], et toujours d’actualité [12–14]. Tout ce tumulte n’empêcha pas Gibbs de formuler en 1902 les bases de ce qui est aujourd’hui la physique statistique moderne [15], justifiant pour la première fois les lois macroscopiques de la thermodynamique classique à partir de phénomènes microscopiques. Cette théorie doit en fait son succès à la simplification technique liée au changement de paradigme qu’elle introduisit au début du XX^e siècle. En effet, grâce à l’hypothèse ergodique, les calculs exacts de trajectoires, généralement infaisables, furent remplacés par un calcul où le temps n’intervenait plus.

L’équation de Boltzmann se retrouve aujourd’hui dans de nombreux domaines des sciences, ayant comme points communs la participation d’un grand nombre d’objets en interaction, et bien souvent, le fait de ne pas être forcément à l’équilibre thermodynamique. Le traitement de tels systèmes n’est alors plus du ressort de la physique statistique d’équilibre, et il est nécessaire de faire appel à d’autres procédés afin de prédire leur comportement. Prenons par exemple une foule sur un trottoir. En-deçà d’une certaine densité critique de passants, ces derniers suivent leur trajectoire tout en s’évitant les uns les autres, subissant çà et là quelques bousculades. Mais lorsque cette foule se densifie (dans un couloir de métro par exemple), nous remarquons une structuration spontanée des passants, en deux files distinctes, une par sens de circulation. Est-il possible de prédire la densité critique à partir de laquelle a lieu cette réorganisation de

l'espace ? Ou plus fondamentalement, quel processus fait que les passants s'organisent spontanément de cette façon ? À plus grande échelle, que dire aussi du trafic routier, des mouvements d'opinion, ou de tout autre phénomène pour lequel la dynamique temporelle est intimement liée aux interactions entre particules élémentaires ?

De tels phénomènes collectifs, qu'ils soient observés pour des passants, des bancs de poissons, ou encore de vols d'étourneaux, apparaissent aussi lors de l'étude de systèmes moins familiers, comme le mouvement d'étoiles au sein de galaxies, ou d'électrons dans un tokamak. La description physique de ces phénomènes peut parfois se faire grâce à des modèles très simples, mais dont la résolution complète de la dynamique se révèle malgré tout extrêmement difficile. Les modèles d'exclusion en sont d'ailleurs une très bonne illustration : certains d'entre eux [16–19] ayant été élaborés dans les années 1980 ne commencent seulement à être compris que maintenant, soit trente ans plus tard [20–23].

Il est cependant possible de conserver une description riche des interactions entre particules tout en s'affranchissant des difficultés techniques qui leur sont inhérentes. Pour ce faire, on élabore des modèles dits de “champ moyen”. Ces derniers sont particulièrement pertinents lorsqu'il s'agit d'étudier des systèmes à interaction à longue portée¹, et l'on peut souligner leur présence dans des domaines variés comme la cosmologie [24–28] ou l'étude des interactions laser-matière [29, 30]. D'un point de vue pratique, l'aspect champ moyen simplifie les calculs statistiques d'équilibre en les rendant bien souvent analytiques. Mais malgré leur simplicité formelle, ces modèles présentent un éventail de comportements parfois difficilement explicables. Pour les systèmes à interaction à longue portée, citons par exemple l'inéquivalence des ensembles statistiques à la limite thermodynamique [31–33]. La dynamique temporelle n'est pas en reste, les systèmes sans collisions pouvant rester piégés dans des états dits quasistationnaires, durant lesquels les observables d'intérêt fluctuent temporellement autour de valeurs moyennes différentes du résultat prédit par le calcul statistique.

L'étude de la relaxation de ces états quasistationnaires vers l'équilibre thermodynamique se retrouve aussi bien en chimie avec l'étude du transport dans les semi-conducteurs [34], qu'en physique nucléaire [35] ou encore en astrophysique [36]. L'impact du nombre de degrés de liberté des systèmes considérés influe d'ailleurs largement sur la durée de vie de ces états, au point d'en faire une question centrale. C'est dans ce cadre que s'inscrit la première partie de cette thèse, traitant d'un modèle paradigmatique hamiltonien à champ moyen. Au cours des quatre chapitres qui vont suivre, nous exposerons différents problèmes liés à l'impact du nombre de particules du système sur les propriétés temporelles de celui-ci.

Le premier chapitre vise à fixer le contexte statistique et dynamique du modèle HMF. Après avoir établi ses propriétés d'équilibre dans l'ensemble canonique, nous étudions le lien avec la théorie de Vlasov associée au modèle, avant d'introduire et analyser les conséquences des fluctuations sur le système.

Le second chapitre se focalise sur l'évolution à temps courts de conditions initiales de type “faisceau froid”. Nous étudions d'abord deux cas particuliers simples, pour lesquels la dynamique est exactement soluble à nombre de particules N fini, avant de généraliser

1. C'est-à-dire que le potentiel d'interaction décroît en $1/r^\alpha$ à l'infini, où r est la distance entre deux particules, et $\alpha < d$ la dimension d'espace.

l'approche à des configurations plus génériques, toujours à N fini. Nous reprenons avantageusement le formalisme de Vlasov afin d'en déduire l'expression asymptotique de taux de croissance dans le cas général, avant de finalement faire le lien avec le phénomène de relaxation violente.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'évolution aux temps longs du modèle HMF. Nous introduisons les états quasistationnaires (QSSs) et établissons un critère dynamique fiable permettant de les caractériser. Nous résolvons ensuite le cas des QSSs proches de l'équilibre grâce à une modélisation stochastique directe de l'aimantation.

Le quatrième chapitre poursuit le travail en s'intéressant à l'interprétation d'un point de vue de l'analyse fonctionnelle des états QSS. Nous y attaquons un cas problématique de QSS, loin de l'équilibre, pour lequel le temps de vie présente un comportement singulier. Nous expliquons ce phénomène en nous basant sur une modélisation stochastique des trajectoires des particules. Nous faisons enfin le lien avec les différents travaux existants sur le sujet.

Chapitre

1

Un premier regard sur le modèle HMF

Sommaire

1.1	Systèmes à interactions à longue portée	9
1.2	Approche champ moyen	10
1.3	Propriétés d'équilibre	11
1.3.1	Point de vue statistique	11
1.3.2	Hamiltonien à une particule	15
1.3.3	Variables action-angle	17
1.4	Théorie de Vlasov associée	17
1.4.1	Équation de Vlasov	17
1.4.2	Solutions stationnaires et stabilité linéaire	19
1.5	Effets de N fini	22
1.5.1	Limite de validité de l'équation de Vlasov	22
1.5.2	Etude des fluctuations d'ensemble	23

1.1 Systèmes à interactions à longue portée

Nous vivons tous les jours, *via* la gravité, l'expérience physique d'un système à interaction à longue portée. La définition de tels systèmes repose sur la vitesse de décroissance à l'infini du potentiel d'interaction à deux corps qui leur est associé. Formellement, soient deux objets vivant dans un espace métrique de dimension d . Notons r la distance entre ces deux objets. Si la décroissance du potentiel à l'infini vérifie

$$V(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r^\alpha}, \quad (1.1.1)$$

avec $\alpha < d$, ce dernier est dit à longue portée¹. À trois dimensions, le potentiel gravitationnel décroît en $1/r$, tout comme le potentiel d'interaction électrostatique. Ce

1. Cette condition traduit en fait l'intégrabilité en dimension d du potentiel sur un espace dont les dimensions tendent vers l'infini.

sont donc des interactions à longue portée. Lorsque le potentiel vérifie (1.1.1), mais que $\alpha \geq d$, ce dernier est alors dit à courte portée. Les interactions de Van Der Waals tombent par exemple dans cette catégorie, ces dernières décroissant à l'infini en $1/r^6$.

Les potentiels d'interaction à longue portée se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique. En cosmologie par exemple, on note l'existence d'un modèle simple (*Gravitational Sheet Model* [37]) permettant d'étudier le comportement temporel d'amas d'étoiles. La généralisation de l'équation de Poisson à une dimension permet d'écrire un hamiltonien \mathcal{H}_{GS} dont vont dériver les équations du mouvement :

$$\mathcal{H}_{\text{GS}} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + 2\pi\mathcal{G}m^2 \sum_{i>j} |x_i - x_j|. \quad (1.1.2)$$

Les particules, au nombre de N , toutes de masse m , et repérées par leurs positions x_i , évoluent dans un espace unidimensionnel sous le potentiel, ici linéaire, dérivant de l'équation de Poisson sus-mentionnée. Notons que par rapport à la définition (1.1.1), le potentiel d'interaction défini dans cet hamiltonien vérifie bien $\alpha = -1 < d = 1$. L'étude des propriétés d'équilibre d'un tel système a donné lieu à une littérature abondante, mais c'est surtout l'impact de la partie cinétique du hamiltonien (1.1.2) sur la dynamique temporelle qui passionne la communauté. Malgré la simplicité apparente du modèle, ce dernier exhibe des propriétés toutes particulières relatives à sa relaxation vers l'équilibre thermodynamique, parmi lesquelles la divergence du temps de vie d'états dits quasistationnaires lorsque l'on augmente le nombre de particules en interaction [36–39].

On retrouve un hamiltonien du même type en physique des plasmas [29, 30], ou encore en mécanique des fluides [40–42]. Tous ces systèmes hamiltoniens ont en commun le fait de mettre en évidence une dynamique temporelle non triviale, dont les liens avec la physique statistique d'équilibre ne sont pas encore totalement résolus à ce jour. Dans l'optique de comprendre un peu mieux la phénoménologie de ces systèmes à longue portée, nous allons par la suite nous placer en conditions limites périodiques et étudier le cas particulier du modèle HMF, pour *Hamiltonian Mean Field*. Il s'agit d'un système unidimensionnel à N particules tout à fait générique, mais où l'on a développé le potentiel d'interaction en série de Fourier avant de le tronquer au premier mode, correspondant à la composante de Fourier “longue-portée” du potentiel choisi. Ce modèle présente l'avantage d'être à champ moyen, ce qui nous permettra d'établir exactement ses propriétés statistiques d'équilibre. De surcroît, l'implémentation numérique de sa dynamique temporelle se révèle peu coûteuse. En dépit de sa simplicité, nous verrons que ce modèle présente des propriétés de relaxation temporelle rappelant celles de systèmes plus complexes.

1.2 Approche champ moyen

Considérons N particules sur le tore $S_L^N \times \mathbb{R}^N$ évoluant selon la dynamique hamiltonienne suivante :

$$\mathcal{H}_{\text{LR}} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^s \sum_{i,j=1}^N V_n \cos[k_n(q_j - q_i)], \quad (1.2.1)$$

où $q_i \in S_L$ représente la position de la particule i sur le cercle $S_L \equiv \mathbb{R}/L$, et p_i son moment conjugué. Comme exposé précédemment, la partie potentielle de ce hamiltonien fait intervenir un développement de Fourier tronqué à l'ordre s d'un potentiel pair, agissant sur toutes les particules. Notons la présence du préfacteur $1/N$ assurant l'additivité de l'énergie (prescription de Kac [43]). Nous avons de plus défini les nombres d'onde $k_n = 2\pi n/L$ pour $1 \leq n \leq s$.

Lorsque $V_n \propto n^{-2}$, notre hamiltonien (1.2.1) correspond à la troncature à grande échelle du potentiel newtonien unidimensionnel aux conditions limites périodiques, ce qui décrit au choix l'interaction gravitationnelle ou Coulombienne, suivant le signe choisi devant le terme de potentiel. Définissons l'ensemble de champs moyens $\{\mathbf{M}_n\}$ comme

$$\mathbf{M}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{\cos(k_n q_j), \sin(k_n q_j)\} = M_n \{\cos \phi_n, \sin \phi_n\}. \quad (1.2.2)$$

Les équations du mouvement associées au Hamiltonien (1.2.1) sont données par

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{LR}}}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{LR}}}{\partial q_i}. \quad (1.2.3)$$

Ces relations permettent alors d'écrire simplement l'équation du mouvement de chaque particule en fonction de ces champs moyens.

$$\ddot{q}_i + \sum_{n=1}^s k_n V_n M_n \sin(k_n q_i - \phi_n) = 0. \quad (1.2.4)$$

C'est ainsi que nous observons l'apparition d'une relation d'autocohérence implicite. En effet, le mouvement de particules conditionne les champs moyens, qui à leur tour interviennent dans l'équation du mouvement de ces dernières. La trajectoire de chaque particule est ainsi globalement couplée au système complet via l'ensemble $\{M_n, \phi_n\}$.

1.3 Propriétés d'équilibre

1.3.1 Point de vue statistique

Un des avantages de cette classe de modèles est que leur fonction de partition se calcule exactement. Particularisons le cas $s = 1$, avec $L = 2\pi$ et $k_1 = 1$. Ceci correspond à ne garder que la composante de plus grande période dans la partie potentielle de (1.2.1). Plaçons-nous aussi dans le cas d'un potentiel attractif. Le hamiltonien que nous considérons dans toute la suite est alors donné par

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [1 - \cos(q_i - q_j)]. \quad (1.3.1)$$

C'est ce modèle que nous appellerons par la suite "HMF", pour ***H**amiltonian **M**ean **F**ield*. L'unique champ moyen $M = (M_x, M_y)$ s'y rapportant s'apparente alors à l'aimantation moyenne du modèle XY [44, 45] :

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos q_i \quad \text{et} \quad M_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin q_i, \quad (1.3.2)$$

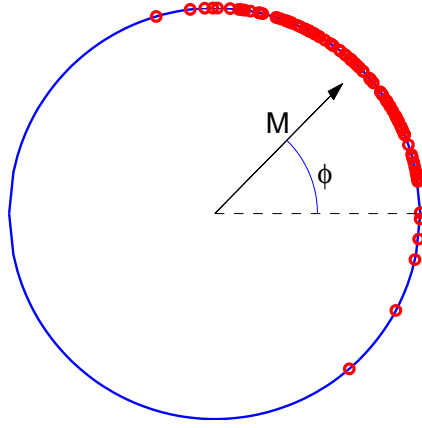


FIGURE 1.1 – Représentation du modèle HMF sur le cercle unité ($L = 2\pi$). Chaque cercle rouge correspond à une particule. L’aimantation M et la phase ϕ sont également représentés.

ce qui peut se réécrire comme $M = (M \cos \phi, M \sin \phi)$, où ϕ est l’angle que fait ce vecteur avec la direction de référence choisie pour les angles. L’équation (1.3.1) prend alors la forme plus compacte

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2} (1 - M^2). \quad (1.3.3)$$

Un exemple de configuration est fourni par la figure 1.1. Cet hamiltonien particulier a de plus l’avantage de générer des trajectoires issues d’équations simples. En effet, le mouvement de chaque particule est décrit par

$$\ddot{q}_k + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(q_k - q_i) = 0, \quad (1.3.4)$$

équation qui, une fois exprimée en fonction de l’unique champ moyen M , se réduit à

$$\ddot{q}_k + M(t) \sin(q_k - \phi(t)) = 0, \quad (1.3.5)$$

ce qui n’est rien d’autre que l’équation d’un pendule dont la pulsation propre dépend de façon autocohérente de la position de l’ensemble des particules. Dans la littérature, ce genre de modèle est communément appelé modèle à “1.5” degrés de liberté².

Malgré le caractère “longue-portée” du modèle HMF, il a été montré que les ensembles statistiques étaient équivalents à la limite thermodynamique [46]. Ainsi, bien que la dynamique du système se fasse par définition à énergie constante, ce n’est pas

2. Cette dénomination traduit le fait d’avoir une seule équation du mouvement pour toutes les particules, mais dont les paramètres dépendent tout de même du temps.

1.3. PROPRIÉTÉS D'ÉQUILIBRE

l'ensemble microcanonique que nous choisissons pour mener l'étude statistique d'équilibre, mais l'ensemble canonique, ce dernier étant nettement plus adapté aux calculs analytiques. La fonction de partition \mathcal{Z} dans cet ensemble s'écrit

$$\mathcal{Z} = \int d^N q d^N p \exp \left[-\beta \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right]. \quad (1.3.6)$$

La partie cinétique s'intègre trivialement, tandis qu'il reste à évaluer l'intégrale "angulaire" sur $\{q_i\}$, que nous notons \mathcal{Z}_{XY} en raison du modèle hamiltonien éponyme qu'elle décrit. À une constante multiplicative près, il découle de (1.3.1) que

$$\mathcal{Z}_{XY} = \int_{S_{2\pi}^N} \prod_{\ell=1}^N dq_{\ell} e^{\frac{\beta}{2N} \left[\left(\sum_{i=1}^N \cos q_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \sin q_i \right)^2 \right]}. \quad (1.3.7)$$

Grâce à la transformation dite de "Hubbard-Stratonovich", nous obtenons

$$\mathcal{Z}_{XY} = \int_{S_{2\pi}^N} \prod_{\ell=1}^N dq_{\ell} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mathbf{u}^2 + \sqrt{2\beta N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}(\{q_i\})} d^2 \mathbf{u}. \quad (1.3.8)$$

Soit, après inversion des intégrales et en développant le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}$,

$$\mathcal{Z}_{XY} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mathbf{u}^2} \left[I_0 \left(\sqrt{\frac{2\beta}{N}} \|\mathbf{u}\| \right) \right]^N d^2 \mathbf{u}, \quad (1.3.9)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro, définie par

$$I_0(z) = \int_0^{2\pi} e^{z \cos q} dq. \quad (1.3.10)$$

Finalement, la fonction de partition totale s'écrit

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta N/2} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{N/2} \frac{N}{2\pi\beta} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-N\psi(v)} d^2 \mathbf{v}, \quad (1.3.11)$$

où nous avons posé $\mathbf{v} = \sqrt{2\beta/N} \mathbf{u}$ et où la fonction ψ est définie par

$$\psi(v) = \frac{v^2}{2\beta} - \log I_0(v). \quad (1.3.12)$$

La généralisation à d'autres troncatures du potentiel ne pose pas de problème technique supplémentaire. Prenons un hamiltonien plus général,

$$\mathcal{H}_{LR} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^s \sum_{i,j=1}^N V_n \cos[k_n(q_j - q_i)], \quad (1.3.13)$$

nous obtenons alors la fonction de partition canonique

$$\mathcal{Z}_{LR} = e^{-\beta N/2} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{N/2} \frac{N^s}{(2\pi\beta)^s} \prod_{n=1}^s \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{V_n} e^{-N\psi_n(v)} d^2 \mathbf{v}, \quad (1.3.14)$$

où nous avons défini, de la même façon que (1.3.12)

$$\psi_n(v) = \frac{v^2}{2\beta V_n} - \log I_0(v). \quad (1.3.15)$$

Dans l'ensemble canonique, l'obtention des propriétés d'équilibre de ces modèles s'opère en minimisant l'énergie libre du système f , dont l'expression est donnée par

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta N} \log \mathcal{Z}. \quad (1.3.16)$$

Pour le modèle HMF, en injectant (1.3.11) dans (1.3.16), on trouve dans la limite $N \rightarrow \infty$,

$$f = f_0 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log (e^{-N\psi(v^*)}), \quad (1.3.17)$$

où la quantité v^* minimise ψ , c'est-à-dire,

$$\frac{v^*}{\beta} = \frac{I_1(v^*)}{I_0(v^*)}. \quad (1.3.18)$$

L'énergie interne par particule s'écrit alors

$$\varepsilon = \frac{\partial(\beta f)}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2} - \frac{v^*(\beta)^2}{2\beta^2}. \quad (1.3.19)$$

En identifiant avec l'expression (1.3.3), nous obtenons, grâce à (1.3.18),

$$M = \frac{I_1(\beta M)}{I_0(\beta M)}. \quad (1.3.20)$$

Un calcul direct utilisant le champ conjugué est présenté en référence [45]. Ainsi, l'aimantation et v^* sont liés par la relation

$$\langle M \rangle_c = \frac{v^*}{\beta}. \quad (1.3.21)$$

À température fixée $1/\beta$, l'aimantation d'équilibre est donc donnée par cette relation d'autocohérence, fixant ainsi l'énergie moyenne par particule *via* la relation

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{H}}{N} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2} (1 - \langle M \rangle_c^2). \quad (1.3.22)$$

En éliminant numériquement β entre les équations (1.3.20) et (1.3.22) nous obtenons le diagramme de phase représenté en figure 1.2. Le calcul microcanonique, qui fournit comme nous l'avons dit, le même résultat, peut être trouvé en référence [46].

De plus, dans la limite $N \rightarrow \infty$, l'ensemble canonique prédit, à β fixé, que les particules se répartissent en moyenne suivant (aux facteurs de normalisation près)

$$f^{\text{GB}} \propto \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2} - M \cos(q - \phi) \right) \right]. \quad (1.3.23)$$

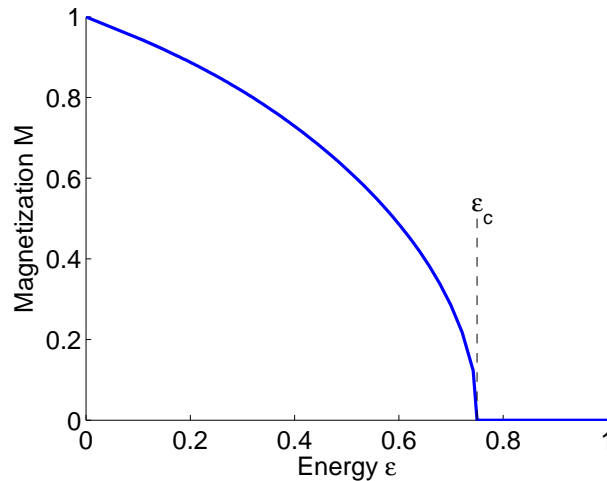


FIGURE 1.2 – Diagramme de phase du modèle HMF. La transition de phase est du second ordre, et a lieu pour $\varepsilon_c = 3/4$.

Attention cependant de ne pas tomber dans l'écueil de penser que cette distribution représente l'état "final" attendu d'une seule réalisation temporelle du HMF. Il s'agit en réalité d'une distribution moyennée sur un ensemble de réalisations en contact avec un thermostat fixant la quantité β . Le lien avec des simulations numériques microcanoniques se réinterprète donc de la façon suivante : nous fixons l'énergie ε , ce qui définit l'aimantation M d'équilibre de façon univoque, c'est-à-dire l'aimantation moyenne attendue de la part d'un ensemble de réalisations isoénergétiques du HMF, et ce, *indépendamment* du temps. Nous observerons toutefois que les réalisations temporelles du HMF finissent par "converger" vers une telle distribution de particules, mais ceci est dû uniquement au fait que cette distribution est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov, que nous présenterons un peu plus tard (voir section 1.4).

1.3.2 Hamiltonien à une particule

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser à la topologie des trajectoires lorsque le système est décrit par la distribution (1.3.23). Revenons un instant aux équations du mouvement (1.2.3). Supposons que le nombre de particules N est infini, et admettons pour l'instant que dans ce cas, la distribution dans l'espace des phases à une particule $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$ est stationnaire. Ceci a pour conséquence d'exempter les quantités M et ϕ de toute fluctuation temporelle. L'énergie par particule dont dérive l'équation du mouvement (1.3.5) s'écrit

$$h(q, p) = \frac{p^2}{2} - M \cos(q - \phi), \quad (1.3.24)$$

et le système est alors composé d'une infinité de particules totalement découplées.

Remarquons tout d'abord que $h \geq -M \cos(q - \phi)$. Ainsi, le domaine spatial acces-

sible une particule est déterminé par l'inégalité

$$\cos(q - \phi) \geq -\frac{h}{M}. \quad (1.3.25)$$

Après avoir remarqué que l'énergie est minorée par $-M$, nous pouvons définir deux zones supplémentaires dans l'espace des phases à une particule du système. Lorsque $h \leq M$, la position q est alors bornée par $\pm \arccos(-h/M)$. Ces trajectoires seront appelées “librations” par la suite, et correspondent à de simples oscillations autour de la position ϕ . Si l'énergie de la particule est choisie au-delà du seuil $h = M$, alors q_k peut prendre n'importe quelle valeur sur $S_{2\pi}$, et nous sommes dans le cas de ce que nous appellerons “rotations”, traduisant la rotation unidirectionnelle sur le cercle de la particule. La limite “topologique” entre les mouvements de libration et de rotation va se

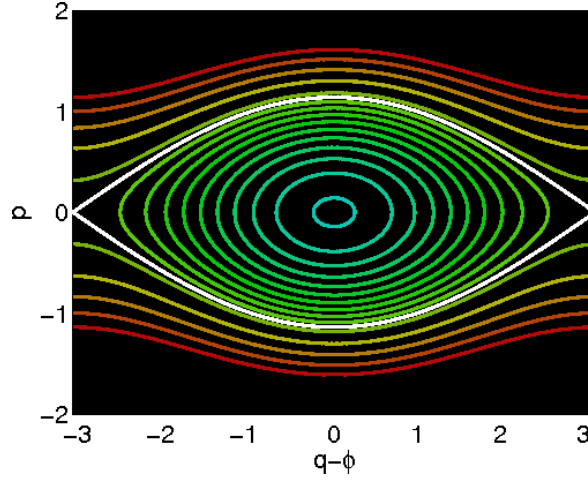


FIGURE 1.3 – Tracé d'orbites dans l'espace des phases à une particule. L'échelle de couleurs représente l'énergie, tandis que la séparatrice est représentée en blanc.

révéler être une notion clef pour l'étude des états quasistationnaires du modèle HMF. Cette frontière dans l'espace des phases est désignée dans la littérature par la notion de *séparatrice*, et est représentée par la courbe blanche sur la figure 1.3. Son équation dans $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$ s'obtient facilement en étudiant le cas limite $h = M$. Nous en obtenons deux, dont les équations dans l'espace des phases à une particule s'écrivent

$$p^* = \pm 2\sqrt{M} \cos\left(\frac{q^* - \phi}{2}\right). \quad (1.3.26)$$

Dans tout ce qui suit, nous dirons que les particules à l'intérieur du domaine défini par les séparatrices sont “piégées”. Ainsi, la valeur du champ moyen M définit la largeur δ de la zone de particules piégées, celle-ci pouvant être réduite à néant au-delà de la transition de phase du modèle, les particules se mouvant alors indéfiniment le long du cercle $S_{2\pi}$ avec une vitesse constante. L'équation (1.3.26) fournit d'ailleurs immédiatement

$$\delta = 4\sqrt{M}. \quad (1.3.27)$$

1.3.3 Variables action-angle

Pour le problème des N pendules découplés, l'aspect intégrable des équations du mouvement se prête bien à une transformation canonique vers des variables action-angle.

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (1.3.28)$$

où nous pouvons remplacer p par $\pm\sqrt{2(h + M \cos q)}$. L'expression sous le radical ne s'annule jamais lorsque $h > M$, et l'intégrale fermée (1.3.28) s'effectue de $-\pi$ à π . Lorsque l'on intègre des orbites incluses dans la séparatrice, q est alors borné par $\pm \arccos(-h/M)$. L'action de la séparatrice J^* prend de plus une forme très simple,

$$J^* = \frac{8\sqrt{M}}{\pi}. \quad (1.3.29)$$

Nous obtenons finalement

$$\frac{J(h)}{J^*} = \begin{cases} E(k) - (1 - k^2)K(k) & \text{si } h \leq M, \\ kE(k^{-1}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.3.30)$$

où $k = \sqrt{1/2 + h/(2M)}$, et où K and E représentent les intégrales elliptiques complètes de Legendre de première et seconde espèce, respectivement. Il est intéressant de calculer la pulsation des oscillations. On a

$$\omega(k) = \frac{dh}{dJ} = \left(\frac{dJ}{dh} \right)^{-1},$$

ce qui donne, respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la séparatrice,

$$\omega_{\text{in}}(k) = \frac{\pi\sqrt{M}}{2K(k)}, \quad \text{et} \quad \omega_{\text{out}}(k) = \frac{\pi k\sqrt{M}}{K(1/k)}, \quad (1.3.31)$$

Nous avons à présent la caractérisation complète du système tel qu'il devrait se trouver lors de l'équilibre, à la limite thermodynamique. Cependant, la dynamique d'évolution du système à partir d'une condition initiale quelconque, et qui plus est à nombre de particules fini ($N < \infty$) reste à étudier. La relation d'autocohérence (1.3.2) imposée à l'aimantation rend toute intégration directe des équations du mouvement impossible, et nous devons alors contourner le problème en décrivant l'évolution temporelle du HMF grâce à d'autres outils. Nous présentons dans la suite le formalisme de Vlasov, qui permet d'obtenir des informations supplémentaires sur le comportement temporel du système en tant que problème aux valeurs initiales.

1.4 Théorie de Vlasov associée

1.4.1 Équation de Vlasov

Afin d'appréhender l'évolution des N particules du modèle HMF dans sa globalité, il est possible de se tourner vers une description continue basée sur la distribution de

particules dans l'espace des phases : il s'agit de l'équation de Vlasov. Il y a plusieurs façons tout à fait équivalentes de l'établir, et nous exposons ici son obtention à partir de l'équation de Klimontovich, qui décrit, quant à elle, de façon exacte (mais formelle), l'évolution de la distribution de particules.

Partons de la distribution à N fini de particules que nous notons $f_d(q, p, t)$. Ainsi,

$$f_d(q, p, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(q - q_i(t)) \delta(p - p_i(t)). \quad (1.4.1)$$

Dérivons cette équation par rapport au temps :

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{aligned} & - p_i [\partial_q \delta(q - q_i)] \delta(p - p_i) \\ & - \dot{p}_i [\partial_p \delta(p - p_i)] \delta(q - q_i) \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.2)$$

$$(1.4.3)$$

L'accélération de chaque particule \dot{p}_i peut être calculée grâce aux équations de Hamilton, ce qui fournit

$$\dot{p}_i = - \sum_{k=1}^N \sin(q_k - q_i) = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q_i - q') \int_{-\infty}^{+\infty} f_d(q', p', t) dq' dp' \quad (1.4.4)$$

Or $p_i \delta(p - p_i) = p \delta(p - p_i)$, et l'équation d'évolution de f_d s'écrit alors

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + p \frac{\partial f_d}{\partial q} + E(q, t) \frac{\partial f_d}{\partial p} = 0, \quad (1.4.5)$$

où le champ de force $E(q, t)$ est défini par

$$E(q, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q' - q) \int_{\mathbb{R}} f_d(q', p, t) dp dq'. \quad (1.4.6)$$

L'équation (1.4.5) est pour le moment exacte, et s'appelle l'équation de Klimontovich. Cependant, son utilisation pratique reste très limitée dans le sens où sa résolution nécessite l'intégration exacte du mouvement de chaque particule, ce qui est précisément ce que l'on cherche à éviter. Nous allons donc établir une autre équation, cette fois-ci seulement approchée, à partir de l'équation de Klimontovich, de la dynamique du mouvement dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Nous pouvons alors définir la distribution f_0 comme une moyenne d'ensemble de f_d sur un ensemble de conditions initiales (à $t = 0$) échantillonnées sur la distribution (continue) $f_{\text{in}}(q^0, p^0)$:

$$f_0(q, p, t) = \langle f_d \rangle_{IC} = \int \prod_i dq_i^0 dp_i^0 f_{\text{in}}(q_i^0, p_i^0) f_d(q, p, t). \quad (1.4.7)$$

Réécrivons à présent la distribution discrète en utilisant avantageusement son homologue continue

$$f_d(q, p, t) = f_0(q, p, t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \delta f(q, p, t), \quad (1.4.8)$$

où nous avons explicitement fait apparaître le facteur $1/\sqrt{N}$ devant la correction δf , provenant de l'application du théorème central limite sur la différence $f_d - f_0$, quantifiant l'erreur faite lors de l'échantillonnage de f_{in} par une distribution discrète à N Diracs (bidimensionnels). Toujours en vertu de ce même théorème, la moyenne d'ensemble sur les conditions initiales de la correction δf vaut zéro, et de fait, nous obtenons

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + p \frac{\partial f_0}{\partial q} + E_0(q, t) \frac{\partial f_0}{\partial p} = -\frac{1}{N} \left\langle \delta E(q, t) \frac{\partial \delta f}{\partial p} \right\rangle_{IC}. \quad (1.4.9)$$

Ainsi, nous en déduisons l'équation de Vlasov, valide dans la limite $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial q} + E(q, t) \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (1.4.10)$$

où les indices “0” correspondant à la distribution continue ont été omis par souci de clarté. L'équation de Vlasov prend exactement la même forme que celle de Klimontovich, à la différence près que les effets de N fini ont totalement été supprimés, au profit d'une description fluide. Cette approche permet une étude simplifiée de la stabilité de certaines distributions d'espace des phases. Nous verrons que l'équation de Vlasov (1.4.10) admet une infinité de solutions stationnaires ne correspondant pas à l'équilibre thermodynamique tel qu'attendu.

1.4.2 Solutions stationnaires et stabilité linéaire

Notons tout d'abord que l'équation de Vlasov (1.4.10) permet de retrouver l'équilibre thermodynamique prédit par l'équation (1.3.23). En effet, cherchons une solution stationnaire factorisable sous la forme $f_{st}(q, p) = \tilde{f}(p)g(q)$, chaque facteur étant supposé normalisé. Nous trouvons alors,

$$\frac{1}{E(q)} \frac{g'(q)}{g(q)} = -\frac{\tilde{f}'(p)}{\tilde{f}(p)} = \kappa, \quad (1.4.11)$$

où κ est une constante. Explicitons le champ de force $E(q)$ (qui ne dépend plus du temps) comme

$$E(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q' - q) \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(p) g(q') dp dq' \quad (1.4.12)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q' - q) g(q') dq' \quad (1.4.13)$$

$$= M_y \cos q - M_x \sin q, \quad (1.4.14)$$

en utilisant la définition de M_x et M_y fournie par l'équation (1.3.2). L'équation (1.4.11) fournit alors

$$\tilde{f}'(p) = -\kappa p \tilde{f}(p), \quad (1.4.15)$$

$$g'(q) = \kappa (M_y \cos q - M_x \sin q) g(q). \quad (1.4.16)$$

Ces deux équations différentielles ordinaires s'intègrent simplement et nous retrouvons bien, après avoir utilisé la contrainte de l'énergie (1.3.22)

$$f_{\text{st}}(q, p) \propto e^{-\beta p^2/2} e^{-\beta M \cos(q-\phi)}. \quad (1.4.17)$$

De plus, comme l'ont fait remarquer les auteurs de la référence [47], l'équation sur g (1.4.16) redonne l'équation d'autocohérence sur M prédite par la physique statistique. En effet,

$$M_x = \int_{-\pi}^{\pi} g(q) \cos q dq = \cos \phi \frac{I_1(\beta M)}{I_0(\beta M)}, \quad (1.4.18)$$

$$M_y = \int_{-\pi}^{\pi} g(q) \sin q dq = \sin \phi \frac{I_1(\beta M)}{I_0(\beta M)}, \quad (1.4.19)$$

ce qui est équivalent à la relation (1.3.20). L'équilibre stationnaire ainsi obtenu coïncide donc parfaitement avec l'équilibre thermodynamique. De plus, cette solution est l'unique solution en variables séparées de l'équation de Vlasov.

Nous souhaitons plus haut étudier le comportement temporel du modèle HMF en tant que problème aux conditions initiales. L'équation de Vlasov reste extrêmement difficile à intégrer, mais il nous est toutefois possible de mener analytiquement l'étude de stabilité linéaire de solutions stationnaires dites homogènes, c'est-à-dire des solutions vérifiant une répartition uniforme des particules sur le cercle. Dans ce cas, les dérivées spatiales s'annulent, tout comme l'aimantation M^3 . Notons une telle solution f_* . Remarquons alors que $E(q, t)$ s'annule. En effet,

$$E(q, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q' - q) \int_{\mathbb{R}} f_*(p) dp dq' = 0 \quad (1.4.20)$$

L'équation de Vlasov (1.4.10) nous donne alors

$$\frac{\partial f_*}{\partial t} = 0, \quad (1.4.21)$$

et cette solution est donc stationnaire. Nous allons naturellement étudier la stabilité linéaire de celle-ci. En notant δf et δE les écarts au premier ordre à f_* et E respectivement, l'équation de Vlasov linéarisée fournit

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + p \frac{\partial \delta f}{\partial q} + \delta E \frac{\partial f_*}{\partial p} = 0. \quad (1.4.22)$$

La méthode standard consiste à rechercher la solution au premier ordre des perturbations en ondes planes sous la forme

$$\delta f(q, p, t) = \hat{f}(p) e^{i(kq - \omega t)} \quad (1.4.23)$$

$$\delta E(q, t) = \hat{E} e^{i(kq - \omega t)}. \quad (1.4.24)$$

3. L'annulation de l'aimantation ne correspond toutefois pas forcément à une distribution angulaire homogène.

En injectant ces deux relations dans (1.4.22), nous obtenons

$$-i\omega \hat{f}(p) + ipk \hat{f}(p) + \hat{E} f'_*(p) = 0. \quad (1.4.25)$$

Ainsi,

$$\hat{f}(p) = \frac{i\hat{E}}{pk - \omega} f'_*(p). \quad (1.4.26)$$

Remplaçons cette expression dans la réponse du champ de force δE . Il vient

$$\delta E = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q' - q) \int_{\mathbb{R}} \frac{if'_*(p)}{pk - \omega} \hat{E} e^{i(kq' - \omega t)} dp dq'. \quad (1.4.27)$$

L'intégrale sur la position se fait aisément et s'annule tout le temps sauf si $k = \pm 1$. Nous obtenons donc⁴

$$\hat{E} e^{i(kq - \omega t)} = -\pi e^{iq} (\delta_{k,1} + \delta_{k,-1}) \int_{\mathbb{R}} \frac{f'_*(p)}{pk - \omega} \hat{E} e^{-i\omega t} dp. \quad (1.4.28)$$

Ainsi, pour $k = \pm 1$, ω vérifie la relation de dispersion

$$1 + \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{\pm f'_*(p)}{\pm p - \omega} dp = 0, \quad (1.4.29)$$

ce qui garantit $\hat{E} \neq 0$ et l'existence d'une solution au premier ordre. Remarquons que les solutions $\omega \in \mathbb{R}$ correspondent à des oscillations pures sans amortissement, tandis que des valeurs complexes $\omega \in \mathbb{C}$, sont associées à un comportement instable pour $\Im(\omega) > 0$, et stable sinon. En simplifiant les signes, il vient

$$1 + \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{f'_*(p)}{p \mp \omega} dp = 0. \quad (1.4.30)$$

Utilisons à présent la formule de Plemelj afin de régulariser l'intégrale apparaissant dans cette formule. En notant \mathcal{P} la valeur principale de Cauchy, nous avons alors, pour $k = +1$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{f'_*(p)}{p - (\omega + i\varepsilon)} dp = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_*(p)}{p - \omega} dp + i\pi f'_*(\omega), \quad (1.4.31)$$

La relation (1.4.30) fournit donc

$$1 + \pi \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_*(p)}{p - \omega} dp + i\pi^2 f'_*(\omega) = 0. \quad (1.4.32)$$

Remarquons tout d'abord que les fréquences réelles imposent l'annulation de $f'_*(\omega)$. Par application du théorème de Nyquist, dans le cas où $f_*(p)$ admet un unique maximum en $p = 0$, la frontière de stabilité est finalement donnée par $\omega = 0$, soit

$$1 + \pi \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_*(p)}{p} dp = 0. \quad (1.4.33)$$

4. La distribution f_* est normalisée à 1 sur $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$.

Cette condition est relativement permissive, et il est donc possible de trouver une infinité de solutions stationnaires linéairement stables. Remarquons que pour une distribution gaussienne dans l'espace des vitesses, telle que

$$f_*(p) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2}\right), \quad (1.4.34)$$

la frontière de stabilité donnée par l'équation (1.4.32) fournit $\beta_c = 2$, ce qui, en vertu de la relation (1.3.22), correspond à une énergie critique $\varepsilon_c = 3/4$. On retrouve là l'énergie critique de transition de phase du système.

En pratique, les simulations numériques à N fini montrent une relaxation vers l'équilibre du système, même en partant de conditions initiales Vlasov-stables. Nous allons, dans les paragraphes qui suivent, esquisser l'impact et l'importance du nombre de particules du système sur la dynamique de celui-ci.

1.5 Effets de N fini

1.5.1 Limite de validité de l'équation de Vlasov

Afin de déterminer les échelles temporelles liées au nombre de particules en jeu, reprenons l'équation (1.4.9). Son membre de droite nous indique que le temps caractéristique de relaxation est de l'ordre de N , et l'on s'attend à ce que l'équation de Vlasov soit valide sur des durées proportionnelles au nombre de particules.

La pertinence de l'étude linéaire de l'équation de Vlasov se limite cependant à des temps plus courts. En effet, reprenons l'équation de Klimontovich (1.4.5) et insérons de nouveau le développement (1.4.8). Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + p \frac{\partial f_0}{\partial q} + E(q, t) \frac{\partial f_0}{\partial p} = -\frac{1}{N} \delta E(q, t) \frac{\partial \delta f}{\partial p} \\ - \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\frac{\partial \delta f}{\partial t} + p \frac{\partial \delta f}{\partial q} + E_0 \frac{\partial \delta f}{\partial p} + \delta E \frac{\partial f_0}{\partial p} \right]. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

En soustrayant cette équation à sa moyenne sur les conditions initiales (donnée par l'équation (1.4.9)) et en simplifiant par \sqrt{N} , il reste

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + p \frac{\partial \delta f}{\partial q} + E_0 \frac{\partial \delta f}{\partial p} + \delta E \frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\left\langle \delta E \frac{\partial \delta f}{\partial p} \right\rangle - \delta E \frac{\partial \delta f}{\partial p} \right]. \quad (1.5.2)$$

Le second membre de cette équation fait intervenir les fluctuations de N fini de façon quadratique. Aussi, pour des temps inférieurs à \sqrt{N} , il est raisonnable de le négliger. De plus, dans le cas où f_0 est angulairement homogène, $E_0 = 0$ et nous retrouvons alors l'équation de Vlasov linéarisée (1.4.22). En résumé, nous obtenons l'*ordering* suivant : l'équation de Vlasov (1.4.10) est valide pour des temps proportionnels à N , tandis que sa version linéarisée perd potentiellement sa validité au bout d'un temps proportionnel à \sqrt{N} .

Par conséquent, le comportement temporel du modèle HMF est extrêmement sensible à la condition initiale. Pour une même énergie, la distribution initiale peut être

instable et donner lieu à un phénomène de relaxation violente (voir Chapitre 2), ou au contraire être Vlasov-stable et perdurer pendant des temps croissant avec le nombre de particules. Il est d'ailleurs possible de montrer que dans le cas d'une distribution angulairement homogène, le temps de relaxation croît strictement plus vite que N . Pour ce faire, remarquons que dans le cas homogène, l'équation de Klimontovich moyennée (1.4.9) s'écrit simplement

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{1}{N} \left\langle \delta E \frac{\partial \delta f}{\partial p} \right\rangle. \quad (1.5.3)$$

La méthode standard pour résoudre cette équation consiste à effectuer une transformation de Fourier-Laplace (Fourier en position, et Laplace en temps), bien adaptée à la résolution des problèmes aux conditions initiales. Le calcul se révèle être long et fastidieux, mais fournit un résultat exact. À une dimension, la distribution f_0 possède la propriété intéressante d'être stationnaire à l'ordre 1 en $1/N$ [46, 48] :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.5.4)$$

La validité de l'équation de Klimontovich moyennée est donc prouvée pour des temps plus longs qu'initialement attendu. Typiquement, le temps de relaxation d'une telle solution f_0 pourrait s'écrire sous la forme $\tau \sim N^\delta$, avec $\delta > 1$. Ceci est en accord avec le fameux cas "1.7", où une distribution initiale homogène en impulsion et en position donne lieu à une relaxation vers l'équilibre sur des temps proportionnels à $N^{1.7}$ [49, 50].

Bien que la physique statistique d'équilibre du modèle HMF soit exactement soluble, nous sommes là face à une situation particulière, où les limites temporelles et thermodynamiques ne commutent en général pas. En effet, à partir d'une distribution de particules initiale différente de l'équilibre, nous avons par exemple pour l'aimantation M l'inégalité

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} M(t) \neq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} M(t). \quad (1.5.5)$$

Ceci a en particulier comme conséquence d'invalider l'hypothèse ergodique. Nous reviendrons plus en détail là-dessus au Chapitre 4.

1.5.2 Etude des fluctuations d'ensemble

Nous nous proposons dans ce paragraphe de calculer les fluctuations d'aimantation dans l'ensemble microcanonique, dans l'idée d'obtenir une estimation des fluctuations *temporelles* durant les réalisations du système sous l'hypothèse d'ergodicité.

Contrairement au calcul microcanonique direct, le calcul dans l'ensemble canonique est beaucoup plus simple. Posons $\langle \delta^2 M \rangle_c = \langle M^2 \rangle_c - \langle M \rangle_c^2$, et commençons par calculer

$$\langle M^2 \rangle_c = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{(S_{2\pi} \times \mathbb{R})^N} M^2[\{q_\ell\}] \exp\left[-\beta \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\right] d^N q d^N p.$$

Grâce à la fonction de partition du modèle XY (1.3.7), ceci se réécrit

$$\langle M^2 \rangle_c = \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \mathcal{Z}_{\text{XY}}. \quad (1.5.6)$$

Or nous savons d'après (1.3.9) que

$$\mathcal{Z}_{\text{XY}} = \frac{N}{\beta} \int_0^\infty v e^{-N\psi(v)} dv. \quad (1.5.7)$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas $\beta > \beta_c$, c'est-à-dire en dessous de l'énergie de transition de phase, qui s'effectue pour $\varepsilon = \varepsilon_c$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, la méthode du point col fournit

$$\langle M^2 \rangle_c = \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \left[\frac{N v^*}{\beta} \sqrt{\frac{2\pi}{N |\psi''(v^*)|}} e^{-N\psi(v^*)} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (1.5.8)$$

avec v^* minimisant ψ , c'est-à-dire vérifiant (1.3.18). Après quelques calculs,

$$\langle M^2 \rangle_c = -2\beta \frac{d\psi(v^*(\beta), \beta)}{d\beta} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

où nous avons fait apparaître explicitement la dépendance en β de la valeur de v^* . Notons que ce résultat est exact à l'ordre N^{-1} près seulement, contrairement à l'équation (1.5.8) qui est exacte à N^{-2} près. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle_c + O\left(\frac{1}{N}\right) &= -2 \frac{dv^*}{d\beta} \frac{v^*}{\beta} + \frac{v^{*2}}{\beta^2} + 2 \frac{dv^*}{d\beta} \frac{I_1(v^*)}{I_0(v^*)} \\ &= -2 \frac{dv^*}{d\beta} \frac{v^*}{\beta} + \frac{v^{*2}}{\beta^2} + 2 \frac{dv^*}{d\beta} \frac{v^*}{\beta} \\ &= \frac{v^{*2}}{\beta^2} \end{aligned}$$

Étant donné que $\langle M \rangle_c = v^*/\beta$, nous en déduisons que

$$\langle \delta^2 M \rangle_c = O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.5.9)$$

À la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$, pour des énergies inférieures à l'énergie critique de transition de phase ε_c , la susceptibilité magnétique du HMF est identiquement nulle. Lorsque l'aimantation d'équilibre est d'ordre N^{-1} , c'est-à-dire lorsque l'énergie est proche ou supérieure à ε_c , nous trouvons finalement [51]

$$\langle M^2 \rangle_c = \frac{2}{N(2-\beta)} = O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.5.10)$$

Cependant, l'évolution temporelle du modèle HMF se faisant à énergie fixée, il serait plutôt pertinent d'évaluer les fluctuations d'aimantation dans l'ensemble microcanonique. En général, les fluctuations d'observables ne coïncident pas entre ensembles statistiques, même à la limite thermodynamique [52]. Il est cependant possible de relier leurs expressions entre deux ensembles différents, ce qui, dans notre cas, fournit (voir Annexe B)

$$\langle \delta^2 M \rangle_\mu = \langle \delta^2 M \rangle_c + \frac{\partial \beta}{\partial \mathcal{H}} \left(\frac{\partial \langle M \rangle_c}{\partial \beta} \right)^2. \quad (1.5.11)$$

Ainsi, au-delà de la transition de phase, la valeur de l'aimantation M étant rigoureusement nulle, nous avons $\partial_\beta \langle M \rangle_c = 0$, et par conséquent égalité entre les fluctuations microcanoniques et canoniques. Un calcul direct microcanonique est disponible en référence [48].

Par contre, en-deçà de l'énergie critique, l'aimantation d'équilibre dépend de la température, et une correction est nécessaire. Reprenons l'expression des fluctuations canoniques (1.5.8). En poursuivant les calculs, à l'ordre N^{-1} , nous obtenons

$$\langle \delta^2 M \rangle_c = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{v^*(\beta)^2}{\psi''(v^*(\beta), \beta)} - \frac{2}{\beta} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (1.5.12)$$

Nous déduisons de (1.5.11) l'expression, à l'ordre N^{-1} également, des fluctuations microcanoniques,

$$\langle \delta^2 M \rangle_\mu = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{v^*(\beta)^2}{\psi''(v^*(\beta), \beta)} - \frac{2}{\beta} - \frac{2(v'^*(\beta) - v^*/\beta)^2}{1 + 2v^*(v'^*(\beta) - v^*/\beta)} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (1.5.13)$$

Sous l'hypothèse ergodique, ces fluctuations d'ensemble sont identiques aux fluctuations temporelles d'une réalisation du système préparé dans son état d'équilibre. Par contre, rien n'indique que l'équation (1.5.13) soit valide pour des fluctuations temporelles du HMF évoluant hors de l'équilibre thermodynamique. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

Instabilités linéaires et relaxation violente

Sommaire

2.1	Motivations	27
2.2	Théorie linéaire exacte à N fini	28
2.2.1	Méthode générale	28
2.2.2	Un premier calcul à N fini	29
2.2.3	Le cas “quiet start”	30
2.2.4	Du quiet start au bi-cluster déterministe	32
2.3	Extension aux configurations initiales aléatoires	33
2.3.1	Bi-cluster aléatoire	35
2.3.2	Bi-cluster gaussien	36
2.4	Calcul des taux de croissance : approche continue	37
2.5	Critère de saturation non-linéaire	40
2.5.1	Concept de relaxation violente	40
2.5.2	De l’instabilité linéaire à la relaxation violente	42
2.5.3	Application au cas faisceau froid	43

2.1 Motivations

La théorie de Vlasov présentée au chapitre précédent nous a permis d’étudier la stabilité linéaire de certaines distributions stationnaires dans la limite $N \rightarrow \infty$. Nous allons voir qu’en particulierisant les conditions initiales à des cas instables où l’impulsion est la même pour toutes les particules, il est possible d’obtenir exactement le taux de croissance de l’aimantation, à nombre de particules fini.

Pour ce faire, nous allons diagonaliser directement la dynamique tangente. Dans un premier temps, nous considérerons des conditions initiales sur réseau, avant de généraliser l’approche à des conditions axisymétriques quelconques définies par des distributions de probabilité. Nous reviendrons alors sur la théorie de Vlasov pour obtenir une fois de plus explicitement le taux de croissance dans le cas général.

2.2 Théorie linéaire exacte à N fini

2.2.1 Méthode générale

Une condition initiale intuitive consiste à répartir uniformément N particules sur le cercle, en leur communiquant une vitesse initiale uniforme. Cet état, comme nous allons le voir, est linéairement instable, et l'on constate que l'aimantation $M(t)$ présente une augmentation exponentielle lors des temps courts d'évolution, $M \propto e^{\gamma t}$. Nous allons ici chercher à établir exactement la valeur de ce taux de croissance γ , sans passer par une approche asymptotique de type Vlasov, avant de généraliser le calcul à d'autres conditions initiales, moins dégénérées. Notons par ailleurs que l'impulsion totale $\sum_k p_k$ est une constante du mouvement, ce qui aura pour conséquence de rendre les taux de croissance uniquement dépendants de la configuration angulaire initiale.

Considérons donc la situation $\{q_k^*, p_k^*\}$ où toutes les particules sont de vitesse $p_k^* = p^*$, et réparties sur le cercle de façon à vérifier $M = 0$. Sans perturbation extérieure, cette configuration est stationnaire. En effet, d'après l'équation (1.3.5), quel que soit k , nous avons $\ddot{\theta}_k = 0$. Afin d'étudier l'évolution du système sous l'effet d'une perturbation, réécrivons les équations du mouvement sous la forme suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \begin{cases} \dot{q}_k = p_k \\ \dot{p}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(q_i - q_k) \equiv F_k \end{cases} \quad (2.2.1)$$

À l'aide de la définition du champ moyen (1.3.2), la force F_k agissant sur la particule k se réécrit en fonction de M_x et M_y comme

$$F_k = M_y \cos q_k - M_x \sin q_k. \quad (2.2.2)$$

En notant avec un astérisque les coordonnées généralisées initiales, nous avons $p_k^* = p^*$, ainsi que l'ensemble des positions q_k^* telles que $M_x = M_y = 0$. Linéarisons le système (2.2.1) au voisinage de cet équilibre. Au premier ordre, la correction en force δF_k s'écrit, sous forme développée

$$\delta F_k = \frac{1}{N} \left[\cos q_k^* \sum_{i=1}^N \cos q_i^* \delta q_i + \sin q_k^* \sum_{i=1}^N \sin q_i^* \delta q_i \right]. \quad (2.2.3)$$

Ceci nous permet de reformuler le problème sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \left\{ \delta \dot{q}_k \right\} \\ \left\{ \delta \dot{p}_k \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ A & 0_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \delta q_k \right\} \\ \left\{ \delta p_k \right\} \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

où I_N représente la matrice identité de taille N , et où la matrice A de même taille est donnée par ses éléments

$$A_{i,j} = \frac{1}{N} \cos(q_i^* - q_j^*). \quad (2.2.5)$$

La stabilité du système dépend des valeurs propres $\{\lambda_k\}$ de la matrice Jacobienne J associée au système (2.2.4). Le problème aux valeurs propres sur J peut être réduit à l'étude spectrale de A grâce à la transformation

$$J - \lambda I_{2N} = \begin{bmatrix} -\lambda I_N & 0_N \\ A & I_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_N & -\frac{1}{\lambda} I_N \\ 0_N & -\lambda I_N + \frac{1}{\lambda} A \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

Ainsi,

$$\det(J - \lambda I_{2N}) = \det(-\lambda I_N) \det(-\lambda I_N + \frac{1}{\lambda} A) = (-1)^N \det(A - \lambda^2 I_N). \quad (2.2.7)$$

En termes de polynôme caractéristique, nous avons donc

$$\chi_J(\lambda) = (-1)^N \chi_A(\lambda^2) \quad (2.2.8)$$

Cette factorisation nous permet de déduire du spectre de A celui de J , en prenant simplement la racine carrée. Nous allons à présent étudier certaines classes de conditions initiales annulant l'aimantation et simplifiant avantageusement la matrice A . La valeur propre maximale de la matrice J nous donnera alors dans chaque cas l'échelle de temps caractéristique d'évolution.

2.2.2 Un premier calcul à N fini

En étudiant la version antiferromagnétique du HMF à basse énergie, les auteurs de [53] ont été amenés à introduire eux aussi une matrice de type (2.2.5). Ils ont remarqué que A pouvait se réécrire grâce à deux vecteurs $\mathbf{X}(\psi)$ et $\mathbf{Y}(\psi)$ définis par

$$X_i(\psi) = \cos(q_i^* + \psi) \quad \text{et} \quad Y_i(\psi) = \sin(q_i^* + \psi), \quad (2.2.9)$$

avec ψ une phase arbitrairement choisie. En effet,

$$A = \frac{1}{N} [\mathbf{X}(\psi) \mathbf{X}^t(\psi) + \mathbf{Y}(\psi) \mathbf{Y}^t(\psi)], \quad (2.2.10)$$

Les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} étant linéairement indépendants, A représente donc une projection sur $\text{Vect}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et son image est de dimension 2, ce qui implique l'existence de deux valeurs propres non nulles λ_{\pm} . Associons la valeur propre λ_+ à la droite engendrée par \mathbf{X} . Cette valeur propre vérifie, d'après (2.2.5)

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \cos(q_i^* - q_j^*) X_j = \lambda_+ X_i. \quad (2.2.11)$$

Réécrivons le membre de gauche en faisant apparaître les coefficients X_i . Pour ce faire, transformons

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(q_i^* - q_j^*) X_j = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \cos(q_i^* + \psi) + \frac{1}{2} \cos(q_i^* - 2q_j^* - \psi) \right]. \quad (2.2.12)$$

Il reste à reformuler la deuxième partie de la somme afin de faire apparaître explicitement les coefficients X_i , ce qui se fait en remarquant que

$$\cos(q_i^* - 2q_j^* - \psi) = \cos(q_i^* + \psi) \cos(2q_j^* + 2\psi) + \sin(q_i^* + \psi) \sin(2q_j^* + 2\psi). \quad (2.2.13)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \cos(q_i^* - q_j^*) X_j &= \frac{1}{2} \cos(q_i^* + \psi) + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \cos(2q_j^* + 2\psi) \cos(q_i^* + \psi) \\ &+ \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \sin(2q_j^* + 2\psi) \sin(q_i^* + \psi). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Choisissons à présent judicieusement la phase ψ afin de faire disparaître le terme en $\sin(q_i^* + \psi)$ (qui correspond au coefficient i de \mathbf{Y}). Il suffit pour cela de d'imposer l'orthogonalité entre \mathbf{X} et \mathbf{Y} , qui se traduit par

$$\sum_{i=1}^N \cos(q_i^* + \psi) \sin(q_i^* + \psi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin(2q_i^* + 2\psi) = 0. \quad (2.2.15)$$

L'équation (2.2.14) fournit finalement

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm M_2}{2}, \quad (2.2.16)$$

avec $M_2 = \langle \cos(2q^* + 2\psi) \rangle$. Ce résultat, bien qu'exact, reste soumis à la détermination de la phase ψ assurant l'orthogonalité des vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} , et ne constitue par conséquent pas une forme close pour les valeurs propres de A .

Nous allons voir qu'il est possible de calculer exactement les valeurs propres de l'aimantation pour certains cas particuliers de conditions initiales sur réseau, ainsi que pour des conditions initiales aléatoires vérifiant une contrainte de symétrie que nous expliciterons.

2.2.3 Le cas “quiet start”

Formellement, la condition initiale “quiet start”, qui fait écho à la terminologie utilisée notamment en physique des plasmas, consiste à répartir de façon déterministe et régulière les particules en position et en vitesse. Pour le HMF, nous nous limiterons cependant au cas “faisceau froid”, pour lequel les particules sont bien réparties sur le cercle selon $q_k^* = 2\pi k/N$ (à une phase globale près), mais dont la vitesse $p_k^* = p^*$ est la même pour toutes les particules. L'équation (2.2.5), nous permet de réécrire immédiatement les coefficients de la matrice A sous la forme

$$A_{i,j} = \frac{1}{N} \cos\left(\frac{2\pi}{N} (i - j)\right). \quad (2.2.17)$$

De façon équivalente,

$$A_{i,j} = A_{(i-j) \bmod N}, \quad (2.2.18)$$

ce qui, en d'autres termes, signifie A est une matrice circulante. Ses valeurs propres s'expriment comme

$$\lambda_k^2 = \sum_{j=1}^N A_j e^{2ij\pi/N}. \quad (2.2.19)$$

De plus, A étant symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles, ce qui nous permet d'égaliser l'équation (2.2.19) avec sa partie réelle. Nous obtenons donc

$$\lambda_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{2j\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{2jk\pi}{N}\right), \quad (2.2.20)$$

ce qui, en remarquant qu'il s'agit d'un produit scalaire, se réécrit

$$\lambda_k^2 = \frac{1}{2} (\delta_{k,1} + \delta_{k,N-1}). \quad (2.2.21)$$

Ainsi, A ne possède qu'une valeur propre double non nulle, et égale à $1/2$. Finalement, le taux de croissance γ_{QS} (*Quiet Start*) pour cette condition initiale vaut

$$\gamma_{QS} = \sqrt{\lambda_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.2.22)$$

et ne dépend pas du nombre de particules N . Les simulations numériques confirment ce résultat, la seule dépendance en N visible étant la valeur initiale de l'aimantation, donnée, en vertu du théorème central limite par $M \propto 1/\sqrt{N}$.

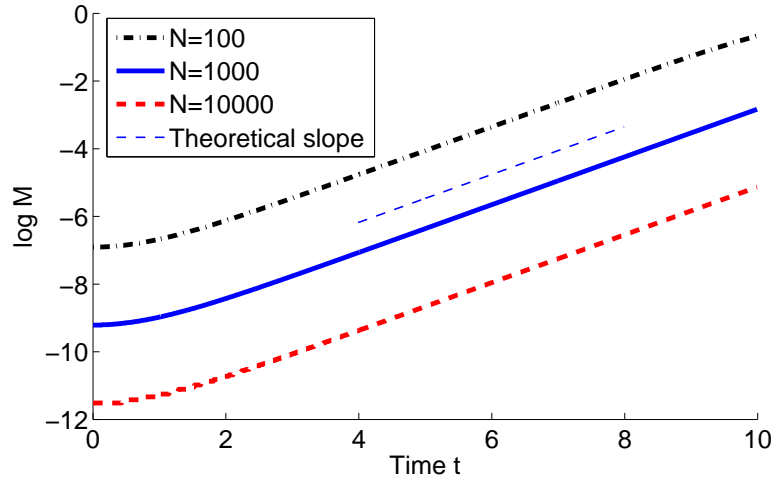


FIGURE 2.1 – Simulation numérique de l'aimantation $M(t)$ en fonction du temps. Comme attendu d'après l'équation (2.2.22), la pente est indépendante du nombre de particules N choisi, et vaut bien $1/\sqrt{2}$ (tracée en pointillés).

Afin de simuler numériquement le comportement du modèle HMF, nous nous sommes tournés vers un schéma d'intégration symplectique, dont le principe est rappelé en Annexe A. La période de démarrage plus lente qu'il est possible d'observer sur la figure 2.1

est due au fait que nos conditions initiales ne sont pas parfaitement pures au sens où elles se décomposent sur plusieurs sous-espaces propres, et pas seulement sur celui associé à la valeur propre $1/\sqrt{2}$.

2.2.4 Du quiet start au bi-cluster déterministe

Construisons à présent un nouvel état à aimantation nulle en distribuant de façon axisymétrique N particules en deux paquets (ou *clusters*) identiques d'extension angulaire $2\Delta q$ et déphasés de π sur le cercle. Formellement, cet équilibre s'écrit

$$\forall k \in \left\{1, \dots, \frac{N}{2}\right\}, \begin{cases} q_k^* = -\Delta q + \frac{4k\Delta q}{N} \\ q_{N/2+k}^* = q_k^* + \pi \\ p_k^* = p^* \end{cases} \quad (2.2.23)$$

Une telle condition initiale est représentée sur la figure 2.2.

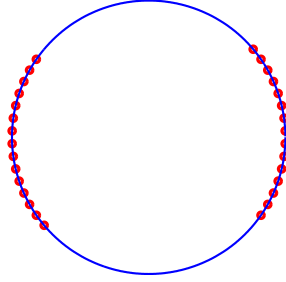


FIGURE 2.2 – Représentation géométrique de la condition initiale dite “bi-cluster”, faisant apparaître les deux paquets de particules, identiques et diamétralement opposés. Toutes les particules ont la même vitesse initiale.

Nous sommes en mesure de mener la même analyse de stabilité que dans la partie précédente. Cependant, nous nous attendons à observer une dépendance du taux de croissance γ_{BCQS} (***Bi-Clustered Quiet Start***) avec Δq , l'extension spatiale des clusters. L'équation (2.2.8) reste valide, mais A n'est plus circulante. Nous pouvons toutefois écrire A sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix}, \quad (2.2.24)$$

où L est une matrice de taille $N/2$ donc les coefficients valent

$$L_{ij} = \frac{1}{N} \cos \left(\frac{4\Delta q}{N} (i - j) \right). \quad (2.2.25)$$

Nous en déduisons le polynôme caractéristique de A ,

$$\begin{aligned}\det(A - \mu I_N) &= \det\left((L - \mu I_{N/2})^2 - L^2\right) \\ &= \det\left(-2\mu\left(L - \frac{\mu}{2}I_{N/2}\right)\right).\end{aligned}$$

Soit, en fonction de λ , valeur propre de J ,

$$\det(A - \lambda^2 I_N) = (-2\lambda^2)^{N/2} \det\left(L - \frac{\lambda^2}{2}I_{N/2}\right), \quad (2.2.26)$$

ce qui se réécrit

$$\chi_A(\lambda^2) = (-2\lambda^2)^{N/2} \chi_L\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (2.2.27)$$

Nous pouvons à nouveau nous intéresser seulement à la matrice L , qui n'est malheureusement toujours pas circulante, mais exhibe une propriété nouvelle : L est une matrice dite de Toeplitz. En d'autres termes, ses coefficients vérifient $L_{ij} = L_{|i-j|}$. Un résultat de Treichler [54] nous permet d'obtenir le spectre $\{\nu_k\}$ de L ,

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{N} \tilde{\nu}_{\pm} \left(\frac{N}{2}, \frac{4\Delta q}{N} \right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\sin(2\Delta q)}{2N \sin(4\Delta q/N)}. \quad (2.2.28)$$

Finalement, en utilisant les équations (2.2.8) et (2.2.27), nous obtenons le taux de croissance désiré

$$\gamma_{\text{BCQS}} = \sqrt{2\nu_+} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\Delta q)}{N \sin(4\Delta q/N)}}, \quad (2.2.29)$$

ce qui se simplifie dans la limite $N \rightarrow \infty$ et donne, en posant $\text{sinc}(x) = \sin x/x$,

$$\gamma_{\text{BCQS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \text{sinc}(2\Delta q)}, \quad (2.2.30)$$

à des termes d'ordre N^{-2} près. La figure 2.3 compare les taux de croissance mesurés numériquement et la prédiction de l'équation (2.2.29). Lorsque $\Delta q = \pi/2$, les particules sont uniformément réparties sur le cercle et l'on retrouve bien le résultat de la partie précédente, à savoir $\gamma_{\text{BCQS}} = \gamma_{\text{QS}} = 1/\sqrt{2}$. L'équation (2.2.29) fait apparaître explicitement une dépendance en N , mais celle-ci se révèle être anecdotique dès que N dépasse la dizaine de particules. À notre connaissance, l'équation (2.2.29) constitue le résultat de la première dérivation d'effets à N fini sur le régime linéaire du modèle HMF.

2.3 Extension aux configurations initiales aléatoires

Il est de façon générale ardu d'obtenir analytiquement l'expression des valeurs propres de la matrice A sans se résoudre à contraindre de façon prohibitive la géométrie de la condition initiale. Nous allons à présent adopter une approche aléatoire afin de lever partiellement cet obstacle. Considérons une condition initiale axisymétrique, comme celle étudiée précédemment, mais relâchons la contrainte de régularité

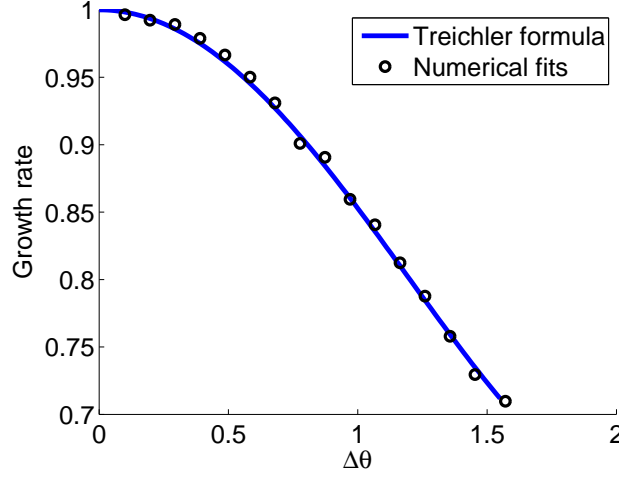


FIGURE 2.3 – Comparaison entre la prédiction théorique (courbe bleue) du taux de croissance donnée par l'équation (2.2.30) avec la mesure numérique (cercles noirs) obtenue pour $N = 1000$ particules. Chaque valeur numérique a été obtenue en moyennant le résultat de 8 simulations indépendantes. Les barres d'erreur sont de la taille des cercles. On retrouve bien $\gamma = 1/\sqrt{2}$ lorsque $\Delta q = \pi/2$, c'est à dire lorsque les deux clusters couvrent entièrement le cercle.

au sein de chaque cluster. Notons $f_0(q)$ la distribution angulaire initiale définissant la répartition spatiale des particules au sein d'un cluster.

En numérotant de façon astucieuse les particules, le problème se réduit à calculer la plus grande valeur propre de la matrice L (de taille $N/2$) définie par

$$\forall (i, j) \in \left\{1, \dots, \frac{N}{2}\right\}^2, \quad L_{ij} = \cos(q_i - q_j), \quad (2.3.1)$$

la structure en blocs de la matrice A donnée par (2.2.24) étant inchangée. Notons que le préfacteur $1/N$ a été intentionnellement omis afin de ne pas introduire de dépendance parasite en N dans le calcul des valeurs propres. Les coefficients L_{ij} vont donc être considérés comme des variables aléatoires, les positions q_i étant, rappelons-le, distribuées selon $f_0(q)$. Notons $\langle L_{ij} \rangle_{f_0} = \mu$ pour alléger les écritures et remarquons que $L_{ii} = 1$. Une extension de la loi de Wigner [55] démontrée en référence [56] montre que lorsque $\mu > 0$, la plus grande valeur propre ν de la matrice L est asymptotiquement donnée par la formule

$$\nu = \frac{2}{N} \sum_{i,j}^{N/2} L_{ij} + \frac{\sigma^2}{\mu} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad (2.3.2)$$

où $\sigma^2 = \langle L_{ij}^2 \rangle_{f_0} - \mu^2$. De plus, la variable aléatoire ν suit une loi Normale de moyenne $\langle \nu \rangle_{f_0}$ et de variance $2\sigma^2$. Comme $L_{ii} = 1$, nous pouvons calculer explicitement sa moyenne $\langle \nu \rangle_{f_0}$, et obtenons

$$\langle \nu \rangle_{f_0} = 1 + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \mu + \frac{\sigma^2}{\mu}. \quad (2.3.3)$$

En vertu des équations (2.2.8) et (2.2.27), le carré du taux de croissance $\lambda^2 = 2\nu/N$ suit aussi une loi Normale, de variance $2\sigma^2 \times (2/N)^2$ et de moyenne

$$\langle \lambda^2 \rangle = \frac{2}{N} \langle \nu \rangle_{f_0} = \frac{2}{N} \left[1 + \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \mu + \frac{\sigma^2}{\mu} \right], \quad (2.3.4)$$

La distribution de λ^2 est toutefois bornée positivement. En effet, à partir d'un certain nombre de particules, $\lambda^2 \leq 1$. Nous déduisons finalement de ceci la valeur moyenne $\langle \gamma \rangle_{f_0}$ du taux de croissance

$$\langle \gamma \rangle = \left\langle \sqrt{\lambda^2} \right\rangle = \mathcal{N}^{-1} \int_0^1 \sqrt{x} \exp \left[-\frac{N^2}{16\sigma^2} (x - \langle \lambda^2 \rangle)^2 \right] dx, \quad (2.3.5)$$

où \mathcal{N} est le facteur de normalisation.

Cette approche simplifie le calcul du taux de croissance en ce sens où il n'y a plus besoin d'avoir recours à la diagonalisation de la matrice A . Cependant, la formule (2.3.5) n'est valable que si la condition initiale en question est axisymétrique afin de pouvoir utiliser la relation (2.2.27). Les contraintes sur la distribution des coefficients L_{ij} sont par contre relativement permissives.

2.3.1 Bi-cluster aléatoire

Remarquons que les états d'équilibre bi-cluster aléatoire et déterministe sont macroscopiquement proches. Il est alors tentant de comparer leurs taux de croissance respectifs. Il ne faut cependant pas commettre l'erreur de croire que l'équation (2.2.29) fournit le taux de croissance moyen pour les deux cas. En effet, et de façon contre-intuitive, le taux de croissance pour le cas régulier (bi-cluster quiet start) va dévier de façon notable par rapport à celui du cas aléatoire lorsque $\Delta q \rightarrow \pi/2$, à savoir lorsque les particules vont être réparties sur le cercle.

Pour s'en convaincre, notons que la plus grande valeur propre de L dans le cas aléatoire fluctue autour de $1 + (N/2 - 1) \mu + \sigma^2/\mu$, ce qui correspond à la valeur propre maximale de la matrice A dont les coefficients sont définis par $a_{ij} = \mu$ pour $i \neq j$, $a_{ii} = 1$. Cette matrice est totalement différente de la matrice L définie par la relation (2.2.25), pour laquelle les coefficients non diagonaux ne sont pas tous égaux.

Avant d'appliquer la formule (2.3.5), nous devons nous assurer que la condition initiale en question vérifie les hypothèses du théorème [56]. De façon générale,

$$\mu = \langle \cos(q_i - q_j) \rangle_{f_0} = \iint f_0(q_i) f_0(q_j) \cos(q_i - q_j) dq_i dq_j, \quad (2.3.6)$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \langle \cos^2(q_i - q_j) \rangle_{f_0} = \iint f_0(q_i) f_0(q_j) \cos^2(q_i - q_j) dq_i dq_j. \quad (2.3.7)$$

En notant $\chi(X)$ la fonction indicatrice d'un ensemble X , définissons la distribution f_0 selon laquelle est répartie la moitié des particules, l'autre moitié étant positionnée par symétrie afin de garantir la validité du développement (2.2.27). Le bi-cluster waterbag aléatoire est ainsi défini par

$$f_0(q) = \frac{1}{2\Delta q} \chi([- \Delta q, \Delta q]). \quad (2.3.8)$$

Insistons sur le fait que f_0 ici n'est que la distribution angulaire sur une *moitié* de cercle. En injectant dans (2.3.6) et (2.3.7),

$$\mu = \text{sinc}^2(\Delta q), \quad (2.3.9)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\Delta q)}{16\Delta q^2} - \mu^2. \quad (2.3.10)$$

Il ressort de façon évidente que $\mu > 0$. De plus, la variance σ^2 est finie, ce qui signifie que l'équation (2.3.5) est valide. La figure 2.4 compare les valeurs numériques mesurées avec la prédiction théorique (2.3.5). Sur cette même figure, nous avons aussi représenté

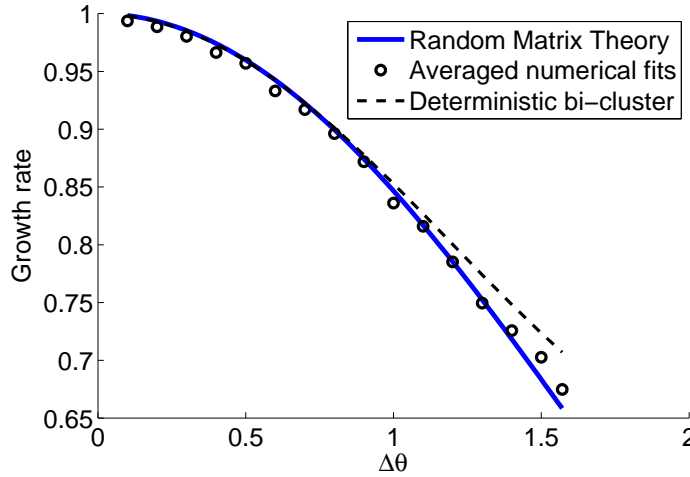


FIGURE 2.4 – La courbe continue correspond au tracé des taux de croissance théoriques donnés par (2.3.5) pour différentes valeurs de Δq pour une condition initiale bi-cluster aléatoire. Chaque mesure numérique, représentée par les cercles noirs, résulte d'une moyenne sur 8 runs de 1000 particules. Les barres d'erreur sont de la taille des cercles. La courbe en pointillés correspond quant à elle au résultat prédit par l'équation (2.2.29).

les taux de croissance du bi-cluster déterministe (2.2.29), afin de mettre en évidence la différence de comportement avec le cas aléatoire, qui se manifeste principalement pour $\Delta q \sim \pi/2$.

2.3.2 Bi-cluster gaussien

Illustrons ici l'utilisation de la formule (2.3.5) dans le cas où les deux clusters de particules sont gaussiens. La largeur de chacun est alors caractérisée par le paramètre σ_q intervenant dans l'expression de f_0 , donnée par

$$f_0(q) = \left[\sigma_q \sqrt{2\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{\pi}{2\sigma_q \sqrt{2}} \right) \right]^{-1} \exp \left(-\frac{q^2}{2\sigma_q^2} \right). \quad (2.3.11)$$

Comme précédemment, calculons μ et σ^2 ,

$$\mu = \frac{e^{-\sigma_q^2}}{\operatorname{erf}^2\left(\frac{\pi}{2\sigma_q\sqrt{2}}\right)} \left[\Re \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\pi - 2i\sigma_q^2}{2\sigma_q\sqrt{2}} \right) \right\} \right]^2 > 0, \quad (2.3.12)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{e^{-4\sigma_q^2}}{8} \left[\operatorname{erf}^2\left(\frac{\pi}{2\sigma_q\sqrt{2}}\right) \right]^{-1} \left[2\Re \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\pi - 4i\sigma_q^2}{2\sigma_q\sqrt{2}} \right) \right\} \right]^2 - \mu^2. \quad (2.3.13)$$

La figure 2.5 montre un très bon agrément entre les mesures numériques et la prédiction théorique (2.3.5).

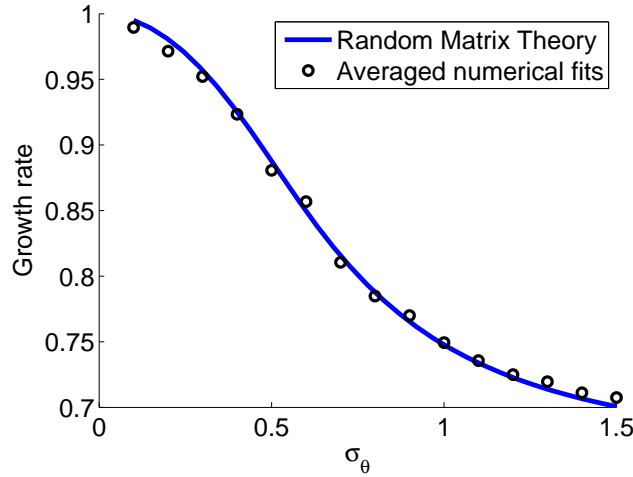


FIGURE 2.5 – Comparaison entre les mesures numériques (cercles noirs) et la prédiction théorique (2.3.5) (en trait bleu continu) pour un bi-cluster gaussien de 1000 particules. Là encore, chaque mesure résulte d’une moyenne sur 8 réalisations, et les barres d’erreur sont environ de la même taille que les cercles.

Dans le cas général, si l’on relaxe la contrainte de condition initiale axisymétrique, la valeur moyenne $\mu = \langle L_{ij} \rangle$ peut être nulle, ce qui invalide notre approche. Nous allons alors reprendre l’approche continue de Vlasov présentée au Chapitre 1 afin d’obtenir les taux de croissance dans la limite $N \rightarrow \infty$ pour des distributions angulaires quelconques, mais toujours monocinétiques ($f_0(q, p) = f_1(q)\delta(p - p^*)$).

2.4 Calcul des taux de croissance : approche continue

Dans la limite d’une description continue du modèle, c’est-à-dire lorsque $N \rightarrow \infty$, la distribution $f(q, p, t)$ obéit à l’équation de Vlasov (1.4.10) que nous rappelons ici,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial q} + E(q, t) \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (2.4.1)$$

Introduisons la densité de particules $n(q, t)$ ainsi que la vitesse moyenne $v(q, t)$, qui sont donnés par les deux premiers moments de f .

$$n(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q, p, t) dp \quad \text{et} \quad v(q, t) = \frac{1}{n(q, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} p f(q, p, t) dp. \quad (2.4.2)$$

Nous pouvons réexprimer $E(q, t)$ en fonction de n par

$$E(q, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha - q) n(\alpha, t) d\alpha. \quad (2.4.3)$$

Calculons le moment d'ordre zéro de l'équation de Vlasov (2.4.1). Il vient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial q} = 0, \quad (2.4.4)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de conservation de la masse dans cette approche fluide. Multiplions à présent l'équation de Vlasov (2.4.1) par p et intégrons. Il vient

$$\frac{\partial(nv)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \frac{\partial f}{\partial q} dp - E(q, t)nv = 0. \quad (2.4.5)$$

Afin de simplifier cette équation, nous allons utiliser le fait que durant le régime linéaire d'évolution de la distribution de particules, celle-ci reste très proche d'un Dirac en p , et reste donc monocinétique en première approximation. Ainsi, la vitesse quadratique moyenne s'identifie au carré de la vitesse moyenne, c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 f dp \underset{\text{faisceau froid}}{\equiv} \left(\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} p f dp \right)^2. \quad (2.4.6)$$

En développant le premier terme de (2.4.5), et en utilisant la conservation de la masse (2.4.4), il vient

$$n \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial(nv)}{\partial q} + 2nv \frac{\partial v}{\partial q} + v^2 \frac{\partial n}{\partial q} - E(q, t)n = 0. \quad (2.4.7)$$

Après simplification et division par n , il reste

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial q} - E(q, t) = 0. \quad (2.4.8)$$

Notons n_0 une solution stationnaire. À l'instar de l'étude de stabilité linéaire développée au paragraphe 1.4.2, posons

$$n(q, t) = n_0(q) + \delta n(q) e^{i\omega t}, \quad (2.4.9)$$

$$v(q, t) = \delta v(q) e^{i\omega t}, \quad (2.4.10)$$

où, sans perte de généralité, nous avons choisi une vitesse v nulle à l'équilibre. Développons en séries de Fourier les deux expressions précédentes. Nous obtenons

$$n(q, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (n_{0,m} + \delta n_m) e^{i(mq + \omega t)}, \quad (2.4.11)$$

$$v(q, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta v_m e^{i(mq + \omega t)}. \quad (2.4.12)$$

En injectant ces expressions dans les équations (2.4.3), (2.4.4) et (2.4.8), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} i\omega \sum_m \delta n_m \exp(imq) + i \sum_m \sum_\ell (m + \ell) n_{0,m} \delta v_\ell \exp[i(m + \ell)q] &= 0, \\ i\omega \sum_m \delta v_m \exp(imq) + i\pi \sum_m \delta n_m (\delta_{-1,m} e^{-iq} - \delta_{1,m} e^{iq}) &= 0. \end{aligned}$$

La projection sur $\exp(ikq)$ simplifie ce système, et fournit

$$\omega \delta n_k + k \sum_m n_{0,m} \delta v_{k-m} = 0, \quad (2.4.13)$$

$$i\omega \delta v_{\pm 1} = \pm \frac{\pi}{\omega} \delta n_{\pm 1}, \quad (2.4.14)$$

les coefficients δv_m étant nuls pour tout $m \neq \pm 1$. Finalement,

$$\omega^2 \delta n_k + k\pi (n_{0,k-1} \delta n_1 - n_{0,k+1} \delta n_{-1}) = 0. \quad (2.4.15)$$

La relation de dispersion s'obtient en annulant le déterminant de la matrice M associée au système linéaire (2.4.15), dont les coefficients sont définis par

$$M_{k\ell} = \omega^2 \delta_{k,\ell} + k\pi (\delta_{\ell,1} n_{0,k-1} - \delta_{\ell,-1} n_{0,k+1}), \quad (2.4.16)$$

avec $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$. Bien que cette matrice soit de taille infinie, étudions d'abord la relation de dispersion obtenue par troncature à l'ordre N des sommes de Fourier, et posons la matrice $\tilde{M}^{(N)}$, de taille $(2N + 1)^2$ dont les coefficients coïncident avec M_{ij} $\forall (i, j) \in [-N, N]^2$. Pour $N = 1$, on a

$$\tilde{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega^2 + \pi n_{0,0} & 0 & -\pi n_{0,-2} \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ -\pi n_{0,2} & 0 & \omega^2 + \pi n_{0,0} \end{bmatrix}. \quad (2.4.17)$$

La condition $\det \tilde{M} = 0$ est alors réalisée lorsque

$$(\omega^2 + \pi n_{0,0})^2 = \pi^2 n_{0,2} n_{0,-2}. \quad (2.4.18)$$

Or $n_{0,-2}$ est égal à son conjugué $n_{0,2}^*$ car n_0 est réel. L'équation (2.4.18) se réduit finalement à l'équation du second degré

$$\omega_\pm^2 = -\pi n_{0,0} \pm \pi |n_{0,2}|. \quad (2.4.19)$$

On démontre par une récurrence immédiate que

$$\forall N > 1, \quad \left| \det \tilde{M}^{(N+1)} \right| = \omega^4 \left| \det \tilde{M}^{(N)} \right|, \quad (2.4.20)$$

ce qui prouve que (2.4.19) donne l'unique racine non nulle (si elle existe) de la relation de dispersion (2.4.15). Finalement, nous déduisons de (2.4.19) quatre solutions en ω ,

dont seule celle qui rend l'argument de l'exponentielle temporelle de (2.4.9) réel et positif nous intéresse. Cette solution coïncide avec le taux de croissance γ , qui est alors donné par

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + 2\pi|n_{0,2}|}}{\sqrt{2}}, \quad (2.4.21)$$

où nous avons utilisé le fait que n_0 soit normalisée pour obtenir $n_{0,0} = 1/2\pi$ et le remplacer dans l'équation (2.4.19). Comparons d'abord cette formule au résultat prédit par le bi-cluster déterministe (2.2.30). Cette condition initiale est décrite par la distribution

$$n_0(q) = \frac{1}{4\Delta q} \chi([- \pi, -\pi + \Delta q] \cup [0, \Delta q]), \quad (2.4.22)$$

dont les coefficients de Fourier se calculent explicitement

$$n_{0,m} = \frac{1}{8\pi i m \Delta q} [e^{2im\Delta q} (1 - e^{-i\pi m}) - 1 - e^{-i\pi m}]. \quad (2.4.23)$$

Nous avons donc $n_{0,2m} = \sin(2m\Delta q)/(4\pi m\Delta q)$ et $n_{0,2m+1} = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. On retrouve bien la formule asymptotique du taux de croissance du bi-cluster (2.2.30).

La figure 2.6 compare la prédiction (2.4.21) avec les mesures numériques pour différentes conditions initiales inhomogènes, en traçant le taux de croissance instantané \dot{M}/M en fonction du temps.

Le taux de croissance de l'aimantation ne dépend finalement que du deuxième harmonique¹ de la distribution initiale si celle-ci vérifie le critère monocinétique, c'est-à-dire si les particules qu'elle décrit ont toutes la même impulsion initiale, pas forcément nulle.

2.5 Critère de saturation non-linéaire

2.5.1 Concept de relaxation violente

Le concept de relaxation violente a initialement été introduit par Lynden-Bell en 1967 [57], lorsque ce dernier s'est intéressé à la question de l'émergence des structures stellaires observées dans les galaxies. En astronomie, la séquence de Hubble [58] fournit une classification des types de galaxies en fonction de leur morphologie. L'idée de Lynden-Bell est née de la volonté d'expliquer leur formation sans avoir recours aux collisions binaires entre étoiles, ces dernières étant extrêmement rares à l'échelle de l'âge des galaxies [59]. Face à la régularité des formes observées, il était naturel de se demander si ces structures n'étaient pas des états quasistationnaires, atteints très rapidement à partir de configurations initiales quelconques, phénomène qualifié de "relaxation violente". La référence [60] présente d'ailleurs une discussion intéressante au sujet de la possibilité de formation d'états quasistationnaires pour des systèmes à interaction à longue portée tout à fait génériques.

1. Notons que l'équation (2.2.16) laissait présager de ce fait par l'apparition de M_2 dans l'expression de λ .

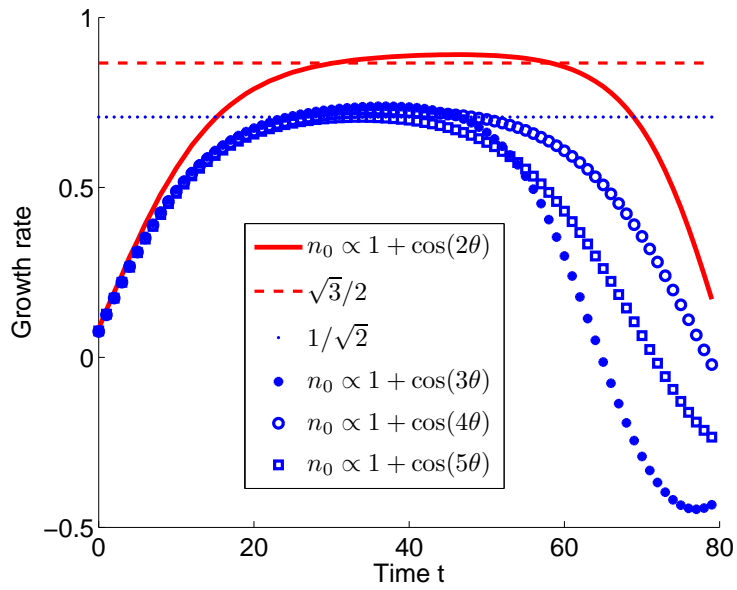


FIGURE 2.6 – Tracé de \dot{M}/M par rapport au temps pour différentes conditions initiales. Les plateaux observés sont associés à un comportement purement exponentiel de l’aimantation, et leur valeur coïncide avec la prédiction théorique (2.4.21), représentée par les traits pointillés horizontaux. Lorsque le second harmonique de la distribution initiale est nul, le taux de croissance vaut bien $1/\sqrt{2}$. Chaque simulation numérique a été faite avec 10^4 particules.

Plus récemment, avec l'avènement de nouvelles capacités informatiques, certaines simulations numériques ont mis en évidence la possibilité d'écarts importants entre les états quasistationnaires prédits par la théorie de Lynden-Bell et ce qui était effectivement observé [61, 62]. Dans le cas du modèle HMF, la prédiction statistique de Lynden-Bell se révèle être toutefois assez juste [63].

Nous allons à présent établir un critère dynamique afin de déterminer si une condition initiale donnée entraîne ou non le HMF vers une relaxation violente, au terme de laquelle la distribution de particules se retrouve dans une configuration proche de l'équilibre statistique (1.3.23).

2.5.2 De l'instabilité linéaire à la relaxation violente

Reprenons l'équation d'évolution fluide du faisceau froid établie au paragraphe 2.4. La validité de l'approximation faisceau froid est bien évidemment limitée dans le temps, mais nous allons ici nous intéresser aux phénomènes non-linéaires qui viennent saturer la croissance exponentielle de l'aimantation.

En développant spatialement en série de Fourier la vitesse et la densité, l'équation fluide (2.4.8) se réécrit

$$\frac{d\delta v_m(t)}{dt} + i \sum_{\ell} \ell \delta v_{m-\ell}(t) \delta v_{\ell}(t) = E_m(t), \quad (2.5.1)$$

avec

$$E_m(t) = 0 \quad \forall m \neq \pm 1, \quad (2.5.2)$$

$$E_1 = \frac{i}{2} (M_x - i M_y). \quad (2.5.3)$$

Les effets non linéaires ne sont plus négligeables dès lors que leur contribution est du même ordre que celle du terme linéaire. Pour le mode $m = 1$, ceci revient à dire que

$$\frac{d\delta v_1(t)}{dt} \sim \sum_{\ell} \ell \delta v_{1-\ell}(t) \delta v_{\ell}(t) \sim \delta v_{-1} \delta v_2 \quad (2.5.4)$$

L'équation d'évolution de δv_2 est quant à elle donnée par

$$\frac{d\delta v_2(t)}{dt} = -i \sum_{\ell} \ell \delta v_{2-\ell}(t) \delta v_{\ell}(t) \sim -i \delta v_1^2 \quad (2.5.5)$$

L'équation (2.5.5) traduit le fait que le mode $m = 2$ est déclenché non linéairement par le mode $m = 1$. Son intégration conduit à

$$\delta v_2(t) \simeq -i \int_0^t \delta v_1(s)^2 ds \simeq -i \frac{\delta v_1^2(0)}{2\gamma} \exp(2\gamma t). \quad (2.5.6)$$

Ce mode croît donc avec un taux deux fois plus élevé que celui du mode linéaire. Remarquons de plus que le mode $m = 0$ reste constant du fait que $E_0(t) = 0$. Ainsi, en remplaçant (2.5.6) dans l'équation (2.5.4), la saturation non linéaire a lieu lorsque

$$2\gamma^2 \sim \delta v_1^2 \simeq \delta v_1^2(0) \exp(2\gamma t) \quad (2.5.7)$$

et où l'on a, d'après (2.5.1),

$$\gamma \delta v_1 \sim E_1 = \frac{i}{2} (M_x - i M_y). \quad (2.5.8)$$

Finalement, en injectant l'ordre de grandeur de δv_1 fourni par l'équation (2.5.7) dans l'équation (2.5.4), nous obtenons l'ordre de grandeur de l'aimantation $|M|_{\text{sat}}$ lors de la saturation non linéaire, à savoir

$$|M|_{\text{sat}} \sim 2^{3/2} \gamma^2. \quad (2.5.9)$$

En notant $\omega_b = \sqrt{M}$ (l'indice b pour *bouncing frequency*) la pulsation caractéristique d'oscillation des particules dans le champ moyen M , l'équation (2.5.9) s'interprète physiquement comme le fait que la saturation non linéaire intervient lorsque le temps caractéristique de croissance linéaire est du même ordre que le temps d'oscillation non-linéaire $1/\omega_b$. Par conséquent, toujours d'après l'équation (2.5.9), on s'attend à ce que la saturation se fasse proche de l'équilibre prédit par la physique statistique d'équilibre en termes d'aimantation si le taux de croissance vérifie

$$\gamma \sim \langle \sqrt{M} \rangle_\mu. \quad (2.5.10)$$

En revanche, si $\gamma \ll \langle \sqrt{M} \rangle_\mu$, la valeur de l'aimantation au seuil de saturation non linéaire sera significativement plus faible que la valeur d'aimantation prédite par la mécanique statistique d'équilibre.

2.5.3 Application au cas faisceau froid

Numériquement, le cas faisceau froid illustre parfaitement le phénomène de relaxation violente, dont la saturation se produit près de l'équilibre. Reprenons le critère (2.5.10). À l'équilibre, comme vu en section 1.3.1, pour $U = 1/2$, nous avons

$$\langle M \rangle_\mu = \langle M \rangle_c = 1/\sqrt{\beta} \equiv \sqrt{T} \quad (2.5.11)$$

où β , l'inverse de la température est implicitement donnée par

$$\frac{I_1(\sqrt{\beta})}{I_0(\sqrt{\beta})} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad (2.5.12)$$

Numériquement, $\langle M \rangle_c \simeq 0.62$ et la température d'équilibre est $T \simeq 0.39$. Comme $\gamma = 1/\sqrt{2}$, on a bien $\gamma \sim \langle \omega_b \rangle_\mu$, où nous avons utilisé l'équivalence des ensembles microcanonique et canonique. On vérifie que pour la perturbation d'aimantation initiale $\delta M_0 \propto N^{-1/2}$, le temps Δt mis par le système pour atteindre la saturation non linéaire est de l'ordre de $\gamma^{-1} \ln(\gamma^2/\delta M_0)$. Ainsi, on obtient $\Delta t \propto \log N$, ce qui est confirmé par la partie gauche de la figure 2.7.

Notons que des observations similaires ont été faites dans le cadre de l'interaction onde-particule pour un autre système à interactions à longue portée [64]. La partie droite de la figure 2.7 montre que le faisceau froid, après la phase de relaxation violente, évolue très lentement vers la prédiction d'équilibre, au sens où la moyenne temporelle

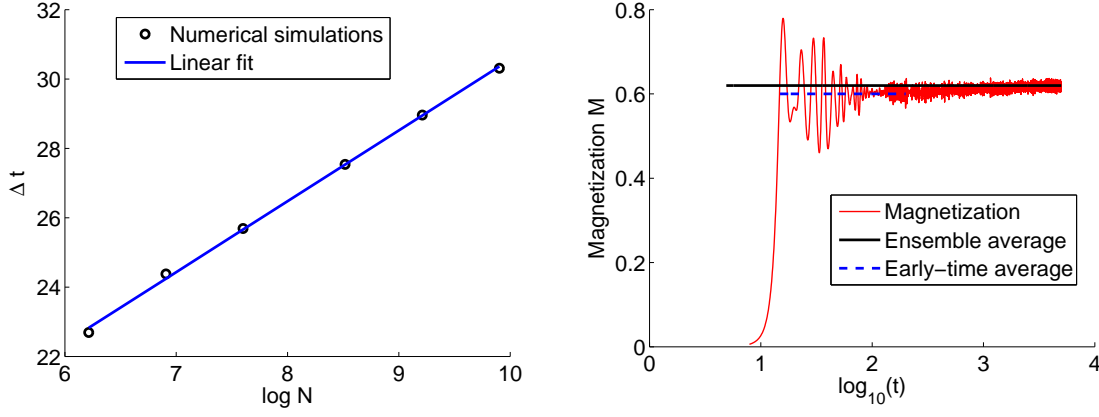


FIGURE 2.7 – (Gauche) Dépendance en N du temps Δt , défini comme le temps nécessaire au système pour atteindre la saturation M_{sat} . (Droite) Evolution temporelle de l'aimantation en partant d'une configuration faisceau froid légèrement perturbée.

locale du champ moyen est sensiblement inférieure à la valeur attendue, et ce pendant une durée relativement importante. Une rapide mesure d'ordre de grandeur donne un temps de relaxation vers l'équilibre proportionnel à N . Ceci avait déjà été remarqué dans le cas d'autres types de conditions initiales [47, 65]. Motivés par cette observation, nous allons au cours du prochain chapitre tenter de comprendre l'émergence de cet état transitoire, ainsi que de prédire sa durée de vie en nous basant sur une approche plus géométrique que ce qui a déjà été tenté jusqu'ici [49, 50, 66–69].

États quasistationnaires d'aimantation macroscopique

Sommaire

3.1	De l'importance des conditions initiales	45
3.2	Indicateurs de thermalisation	50
3.2.1	L'intégrale de corrélation	50
3.2.2	Le rôle des séparatrices	53
3.2.3	Un premier indicateur de thermalisation fiable	54
3.3	Modélisation stochastique de l'aimantation	56
3.3.1	Le développement de Kramers-Moyal	56
3.3.2	Subtilités dues au bruit multiplicatif	57
3.3.3	Caractérisation statistique du champ moyen	59
3.3.4	Première application au HMF	60
3.3.5	Résultats	62
3.3.6	Remarques sur l'équilibre	64

3.1 De l'importance des conditions initiales

L'étude de mécanique statistique d'équilibre présentée au Chapitre 1 prédit la valeur du module du champ moyen minimisant l'énergie libre du système dans l'ensemble canonique. L'équivalence des ensembles statistiques pour le modèle HMF fait que le calcul microcanonique, plus complexe mais adapté à la dynamique temporelle à énergie constante du modèle fournit exactement la même prédiction. Par contre, l'aspect temporel n'est pas pris en compte par la théorie statistique, qui s'appuie sur l'hypothèse ergodique de Boltzmann. Pourtant, nous allons voir qu'au-delà du comportement aux temps courts, présenté pour un cas particulier au Chapitre 2, le choix des conditions initiales ne se révèle pas si innocent que cela lorsqu'il s'agit d'étudier la relaxation du système vers l'équilibre attendu.

Une question va très rapidement se poser : comment caractériser un équilibre thermodynamique pour le modèle HMF ? En réalité, et comme nous le discuterons au Chapitre 4, il n'existe pas, en vertu du théorème de récurrence de Poincaré, d'équilibre macroscopique en tant que point fixe du flot hamiltonien. Il se trouve cependant que les réalisations temporelles du HMF évoluent vers un état que nous appellerons, par abus de langage, *état d'équilibre*, défini par la distribution f^{GB} (équation (1.3.23)), qui, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.2, n'est rien d'autre qu'une solution stationnaire particulière de l'équation de Vlasov, coïncidant avec la prédiction statistique de l'ensemble canonique.

Jusqu'à présent, la majorité des travaux [47, 49, 65, 67, 68, 70] se sont intéressés à des observables telles que l'entropie microcanonique ou l'aimantation du système à un instant t . Connaissant leurs valeurs attendues, il devient alors possible de statuer, à une barre d'erreur près, sur l'équilibre du système, en comparant les valeurs moyennes temporelles obtenues par la simulation avec la prédiction de Boltzmann. Cependant, les fluctuations d'aimantation dues au nombre fini N de particules présentes dans les simulations rendent cette tâche quelque peu ardue, et peu précise en l'absence d'un nombre suffisant de réalisations. Ces fluctuations peuvent être de deux natures différentes. En effet, pour une même *distribution* initiale dans l'espace des phases, l'échantillonnage de la condition initiale à nombre de particules fini rend la dynamique dépendante de la réalisation. La valeur moyenne temporelle de l'aimantation suit une distribution localement gaussienne autour de la prédiction statistique, et son écart-type décroît en $1/\sqrt{N}$ avec le nombre de particules N . On parle alors de fluctuations d'ensemble, telles qu'on les entend habituellement en physique statistique. Lorsque l'hypothèse ergodique est vérifiée, ces fluctuations d'ensemble sont égales aux fluctuations temporelles, au sein d'une seule et même réalisation.

En partant d'une configuration initiale donnée, l'évolution de l'aimantation va d'abord dépendre de la stabilité linéaire de la distribution en question. Si la distribution est instable, l'aimantation va subir des fluctuations d'abord macroscopiques (comme dans le cas du faisceau froid étudié au chapitre précédent), avant de finalement osciller autour d'une certaine valeur. Si la distribution initiale est stable, l'aimantation oscille alors tout de suite autour de sa valeur initiale. Lorsque la valeur moyenne temporelle locale de l'aimantation, c'est-à-dire prise sur une échelle de temps grande devant la période d'oscillation de $M(t)$, diffère de la valeur canonique attendue¹, nous dirons que le système est dans un état *quasistationnaire*, ou QSS (pour *Quasi-Stationary State*). Dans de tels cas, en laissant le système évoluer, les observables macroscopiques de ce dernier convergent souvent lentement vers leurs valeurs d'équilibre. Nous nous référerons au *temps de vie* du QSS comme le temps mis par le système pour relaxer vers l'équilibre, où les valeurs des observables en question coïncident bien avec leurs prédictions statistiques.

Les nombreuses simulations numériques sur ce sujet permettent de mettre en évidence l'étroite relation entre le nombre de particules du système et le temps de vie des états QSS. Pour certaines conditions initiales, les états quasistationnaires en résultant ont été observés comme subsistant pendant une durée proportionnelle au nombre de

1. Comme dans le cas présenté au Chapitre 2, la différence peut être faible, ce qui rend la détection d'un état quasistationnaire potentiellement difficile.

particules N du système [66, 71]. Un cas particulier a cependant déchaîné les passions depuis sa découverte [49, 50], et a été mesuré comme persistant pendant une durée proportionnelle à $N^{1.7}$. Enfin, à énergie plus élevée, en particulier au-delà de l'énergie critique de transition de phase, des QSS dont le temps de vie diverge comme e^N ont aussi été observés [50].

Dans le cadre de cette thèse, nous nous pencherons uniquement sur les QSS obtenus pour une énergie inférieure à l'énergie critique. Plus particulièrement, ce chapitre est dédié à l'étude d'états QSS dont l'aimantation moyenne M^{QSS} ne dépend pas² de N . La valeur du champ moyen d'équilibre, notée M^{GB} , est alors un réel compris entre 0 et 1, et déterminé par la relation d'autocohérence (1.3.20). Reprenons dans un premier temps la distribution initiale dite “faisceau froid”. Nous avons établi analytiquement le taux de croissance de l'aimantation du système $M(t)$ durant la phase linéaire au Chapitre 2. Après cette phase de relaxation violente, l'aimantation subit des oscillations macroscopiques avant de finalement se stabiliser autour d'une valeur donnée, qui apparaît être différente de la valeur de M^{GB} attendue à l'équilibre. Le tracé de l'espace

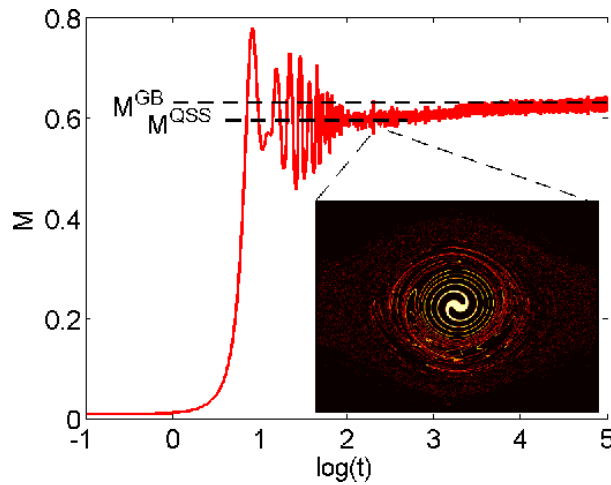


FIGURE 3.1 – Évolution de l'aimantation du système à partir de la configuration initiale “faisceau froid”. Après un régime transitoire faisant office de “relaxation violente”, l'aimantation se stabilise vers une valeur légèrement inférieure à la valeur prédite par la mécanique statistique d'équilibre, avant de converger lentement vers cette dernière. L'inset représente un instantané de l'espace des phases à une particule du système durant le QSS. La présence de la structure en spirale confirme que la distribution de particules n'est pas du tout celle prédite par l'équation (1.3.23).

des phases à une particule $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$ montre l'existence d'une structure en spirale, très différente de ce qui est attendu de la distribution d'équilibre canonique f^{GB} (équation (1.3.23)). Cet exemple, parmi beaucoup d'autres, fait apparaître une durée de vie de l'état QSS proportionnelle à N . Ainsi, le temps mis par l'aimantation pour atteindre

2. Un cas où M^{QSS} dépend de N fera l'objet du chapitre suivant.

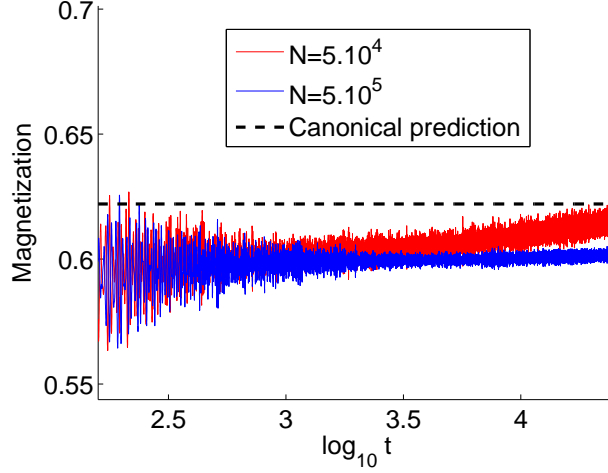


FIGURE 3.2 – Zoom sur un intervalle de temps où la différence de comportement entre 5.10^4 et 5.10^5 particules est bien visible dans le cas du QSS faisceau froid. L’aimantation commence déjà à croître pour le nombre de particules le plus faible, alors que pour l’autre, le système est toujours piégé dans un état QSS. Remarquons aussi la différence d’amplitude des fluctuations, ces dernières étant bien plus marquées à 5.10^4 particules qu’à 5.10^5 .

la valeur prédite par les calculs statistiques croît linéairement avec le nombre de particules constituant le système [66, 71]. La figure 3.2 met en évidence l’effet du nombre de particules sur la persistance du plateau QSS de l’aimantation. Notons aussi l’amplitude des fluctuations, bien plus contenues dans le cas à $N = 5.10^5$ particules par rapport à celui à $N = 5.10^4$.

Prenons à présent une condition initiale dite “waterbag”, définie par la distribution

$$f_{\text{WB}}(q, p) = \frac{1}{4\Delta q \Delta p} \Theta(\Delta p - |p|) \Theta(\Delta q - |q|), \quad (3.1.1)$$

où Θ représente la fonction de Heaviside. D’un point de vue géométrique, cela revient à disposer de façon homogène les particules dans un rectangle de $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$, de taille $2\Delta q \times 2\Delta p$. L’énergie moyenne par particule associée se calcule aisément et donne alors

$$U = \frac{\Delta p^2}{6} + \frac{1}{2} (1 - \text{sinc}^2 \Delta q). \quad (3.1.2)$$

Plaçons nous dans le cas particulier $\Delta q = \pi$, ce qui revient à positionner les particules de façon uniforme sur tout le cercle, et ajustons Δp afin d’obtenir une énergie $U = 0.69$. Ce cas correspond au cas “waterbag” étudié de façon extensive [49], et présente la particularité d’être Vlasov-stable. En effet, dans le cas d’une distribution homogène en q , nous avons vu que la limite de stabilité est donnée par

$$1 + \pi \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{\text{WB}}(p)}{p} dp = 0. \quad (3.1.3)$$

Or, à partir de (3.1.1), nous pouvons écrire

$$f'_{\text{WB}}(q) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\Delta p} [\delta(p + \Delta p) - \delta(p - \Delta p)]. \quad (3.1.4)$$

Nous trouvons alors que la limite de stabilité du waterbag est donnée par $\Delta p^2 = 1/2$, ce qui, une fois injecté dans l'expression de l'énergie (3.1.2) fournit $U_c = 7/12$. En étudiant plus précisément le signe de ω dans (1.4.24), nous trouvons que pour $U > U_c$, les équilibres homogènes de type waterbag sont linéairement stables, ce qui est bien le cas de l'exemple présenté ici, pour lequel $U = 0.69 > U_c$.

À partir d'une aimantation dont la loi d'échelle impose $M \propto N^{-1/2}$ en vertu du théorème central limite, la stabilité linéaire que nous venons d'établir permet au système de persister dans un état proche de la configuration initiale. De plus, si l'on se réfère à la figure 3.3, le champ moyen durant la phase de QSS présente cette fois-ci une différence avec M^{GB} bien plus marquée que dans le cas du faisceau froid. Notons que

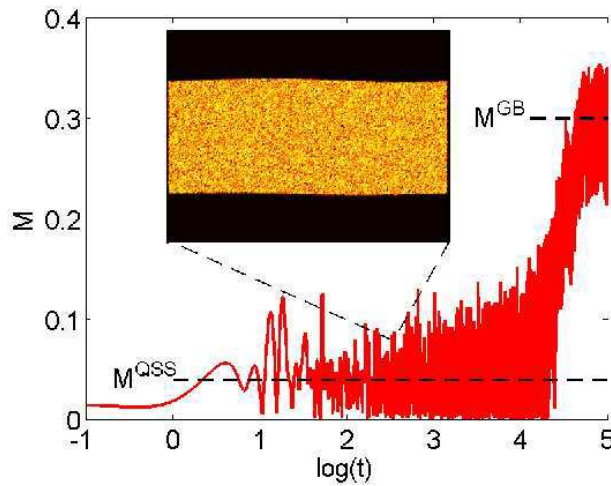


FIGURE 3.3 – Évolution temporelle de l'aimantation du système à partir de la configuration initiale “waterbag” à $U = 0.69$. La différence entre l'aimantation pendant le QSS et M^{GB} est cette fois-ci spectaculaire. L'inset montre à nouveau la distribution des particules dans l'espace des phases, très différente de la prédiction canonique.

là-encore, la distribution des particules dans l'espace des phases est très différente de ce qui est prédit par l'équilibre canonique (1.3.23).

Quant au temps de vie du QSS résultant du waterbag, contrairement au cas précédent où l'aimantation QSS était proche de l'aimantation “d'équilibre”, sa dépendance avec le nombre de particules a été mesurée comme proportionnelle à $N^{1.7}$ sur la plage $N \sim 10^3 - 2 \cdot 10^4$ [49, 50]. La figure 3.4 permet de comparer l'évolution de l'aimantation à partir d'un waterbag à $U = 0.69$ pour différents nombres de particules. Plus N augmente, plus la durée de vie du QSS augmente, ce qui est visible via l'allongement du plateau du QSS.

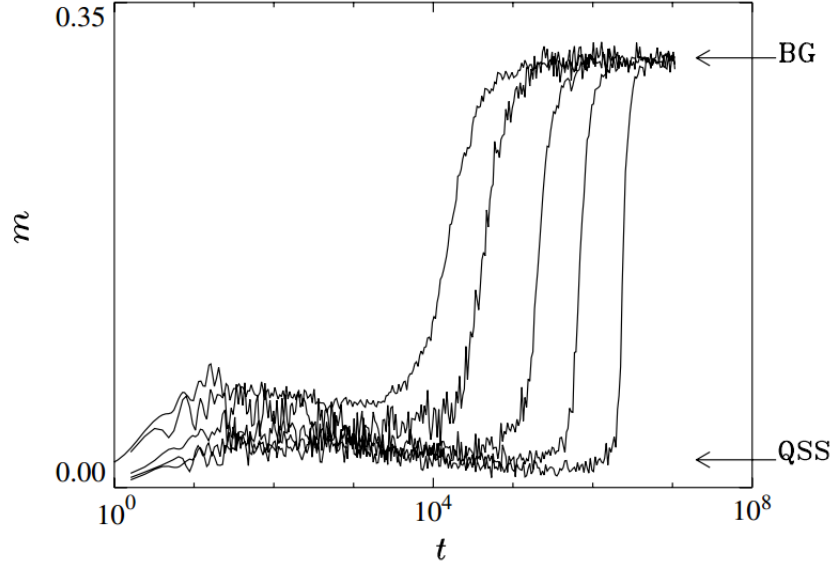


FIGURE 3.4 – Tracé de l'aimantation en fonction du temps pour différents nombres de particules (10^3 , 2.10^3 , 5.10^3 , 10^4 et 2.10^4). Chaque courbe a été obtenue après moyenne sur un certain nombre de réalisations. Nous observons que l'état QSS s'allonge avec le nombre de particules. La figure provient de la référence [46].

Nous avons distingué deux cas. Pour le premier, l'aimantation durant le QSS est indépendante du nombre de particules, et $M = O(1)$, tandis que le deuxième exemple, Vlasov-stable, fournit une aimantation $M = o(1)$ dépendante du nombre de particules. Chaque situation fournit une loi d'échelle différente pour le temps de vie ; linéaire en N pour le cas $M = O(1)$, et mesurée comme proportionnelle à $N^{1.7}$ pour le cas $M = o(1)$.

Nous allons à présent nous intéresser à une caractérisation plus fine des états QSS. Pour cela, en allant au-delà de l'étude de grandeurs statistiques d'intérêt telles que l'aimantation, nous allons tenter de comprendre géométriquement, à l'aide de l'espace des phases à une particule, l'origine de la persistance de tels états, afin d'apporter un nouvel éclairage sur la prédiction de leur durée de vie.

3.2 Indicateurs de thermalisation

3.2.1 L'intégrale de corrélation

Savoir déterminer si le système est ou non dans son état d'équilibre s'avère donc être une question centrale dans l'étude de la persistance des QSS. Mais comme nous l'avons vu, savoir si oui ou non l'aimantation a atteint sa valeur d'équilibre n'est pas une tâche facile compte-tenu des fluctuations temporelles de celle-ci. Cependant, nous connaissons la distribution de l'espace des phases à l'équilibre (éq. (1.3.23)), et nous allons en tirer parti. Les deux exemples de QSS présentés lors du paragraphe précédent ont fait apparaître une différence flagrante entre la distribution de l'espace des phases à une

particule durant le QSS et celle attendue à l'équilibre thermodynamique, représentée en figure 3.5.

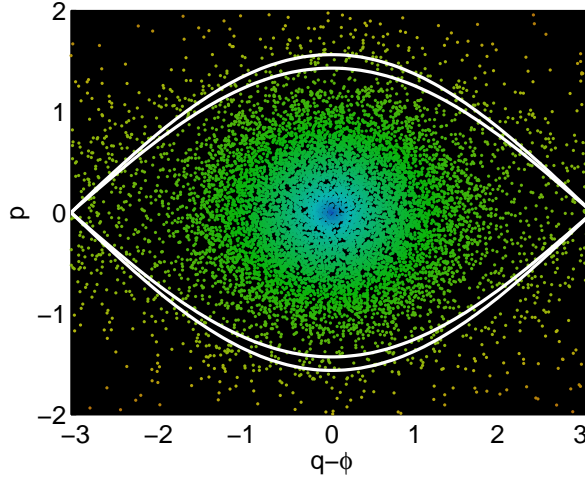


FIGURE 3.5 – Instantané de l'espace des phases à une particule pour une configuration d'équilibre, avec $N = 10^4$. Les courbes blanches en trait plein représentent deux positions extrêmes des séparatrices.

Latora *et al.* [65] se sont intéressés à la dimension fractale de l'espace des phases à une particule, en étudiant l'intégrale de corrélation, dont l'approximation à N fini s'écrit comme

$$C_N(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(r - d_{i,j}), \quad (3.2.1)$$

où $d_{i,j}$ est la distance euclidienne entre deux particules i et j de l'espace des phases à une particule, et où, là encore, Θ représente la fonction de Heaviside. Asymptotiquement, lorsque $N \rightarrow \infty$, $C \propto r^\nu$, où ν est la dimension fractale de l'espace. L'avantage de la distribution (1.3.23) est que nous pouvons calculer analytiquement la valeur asymptotique (lorsque $N \rightarrow \infty$) de l'intégrale de corrélation, pour toute distance r . Il vient

$$C(r) \propto \int dq dq' dp dp' \Theta \left(r - \sqrt{(q - q')^2 + (p - p')^2} \right) f^{\text{GB}}(q, p) f^{\text{GB}}(q', p'). \quad (3.2.2)$$

Changeons de variables, et posons $u = q - q'$ et $v = p - p'$. Ceci fait apparaître un produit de convolution dans l'expression précédente, et nous obtenons

$$C(r) \propto \int du dv \Theta \left(r - \sqrt{u^2 + v^2} \right) [f * f](u, v). \quad (3.2.3)$$

Enfin, après introduction des bons facteurs de normalisation, et en changeant de nouveau de variables ($(u, v) \rightarrow (\rho, \phi)$),

$$C(r) = \frac{\pi^{-5/2} \sqrt{\beta}}{8I_0^2(\beta M)} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^r \rho d\rho e^{-\beta(\rho \cos \phi)^2/4} \int_{-\pi}^{\pi} dq e^{\beta M [\cos q + \cos(q - \rho \sin \phi)]}, \quad (3.2.4)$$

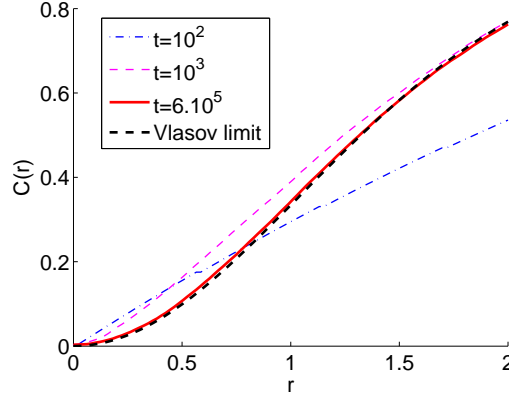


FIGURE 3.6 – Comparaison entre l’intégrale de corrélation (3.2.1) calculée numériquement avec seulement 300 particules et la formule asymptotique donnée par (3.2.4), dans le cas “faisceau froid”. À $t = 10^3$, alors que l’aimantation semble avoir atteint sa valeur d’équilibre, l’intégrale de corrélation diffère encore de façon notable de ce qui est attendu à l’équilibre.

En développant cette expression pour de faibles valeurs de r , on trouve bien un comportement parabolique : $C(r) \sim r^2$. Comme en atteste la figure 3.6, la comparaison entre le résultat asymptotique et le calcul numérique est tout à fait possible, même à faible nombre de particules. En effet, les courbes obtenues ne sont plus sujettes au bruit inhérent aux fluctuations temporelles, qui, pour le champ moyen, empêchaient tout diagnostic fiable en l’absence d’un nombre conséquent de réalisations.

Toujours dans le cas faisceau froid, la figure 3.6 nous apporte une information supplémentaire : à temps courts, nous observons que $C(r) \sim r$. Ceci s’interprète par le fait qu’initialement, la ligne de particules dans l’espace des phases projeté s’enroule par l’effet de la rotation différentielle : les particules situées proches des bords ($\pm\pi$) mettent plus de temps à décrire une oscillation que celles proches du centre. C’est pour cette raison que nous voyons émerger une spirale dans les tracés d’espace des phases. L’intégrale de corrélation se comporte alors initialement linéairement, traduisant une dimension d’espace de 1, avant de converger, lentement donc, vers un comportement parabolique.

Notons la définition d’un indicateur de thermalisation très pertinent par Joyce et Worrakitpoonpon [37], basé sur la séparabilité en impulsion et position de la distribution d’équilibre (1.3.23). Afin de déterminer si leur système a atteint ou non l’équilibre, les auteurs introduisent la quantité

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{\langle |q|^\alpha |p|^\beta \rangle}{\langle |q|^\alpha \rangle \langle |p|^\beta \rangle} - 1, \quad (3.2.5)$$

qui s’annule quels que soient les entiers α et β lorsque la distribution est exactement à variables séparées. En remarquant que l’unique solution de l’équation de Vlasov à la fois stationnaire et à variables p et q séparées n’est rien d’autre que la fonction d’équilibre de Gibbs-Boltzmann (1.3.23), le paramètre d’ordre $\phi_{\alpha\beta}$ permet donc de distinguer clairement l’état QSS de l’équilibre thermodynamique.

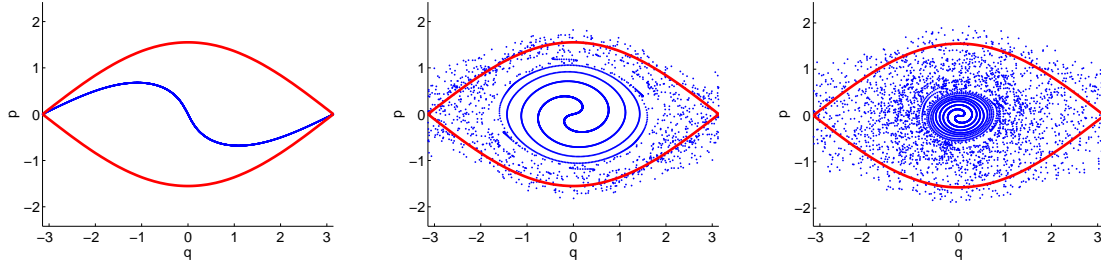


FIGURE 3.7 – Trois espaces des phases instantanés issus du faisceau froid, dans l’ordre chronologique de gauche à droite. La dimension fractale ressortant de l’intégrale de corrélation augmente progressivement de 1 vers 2. Les séparatrices instantanées sont indiquées en trait plein rouge.

Malgré l’intérêt évident de l’intégrale de corrélation comme indicateur de thermalisation par rapport à une simple moyenne d’aimantation, ou du critère donné par l’équation (3.2.5), ces derniers ne nous expliquent toujours rien sur le phénomène de persistance du QSS, ni pourquoi son extension temporelle est finie et comment elle dépend du nombre de particules.

3.2.2 Le rôle des séparatrices

La condition initiale “faisceau froid” constitue un cas paradigmatique, à partir duquel non seulement nous avons pu mettre en évidence la relaxation violente lors du chapitre précédent, mais aussi grâce auquel nous avons pu comprendre l’importance des séparatrices vis-à-vis de la persistance des états QSS.

Nous venons de voir qu’une telle condition initiale donnait naissance à une spirale dans l’espace des phases à une particule, due à la rotation différentielle des pendules. En étudiant l’évolution de cette structure cohérente au cours du temps, nous remarquons qu’elle se délite pour finalement laisser place à un regroupement de particules obéissant à la répartition (1.3.23).

Mais comment est-il possible d’observer, alors que l’aimantation oscille de façon erratique, une structure spirale robuste et sujette à une simple rotation dans l’espace des phases ? La réponse est donnée par la localisation du chaos dans l’espace des phases à une particule. Nous avons vu au paragraphe (1.3.2) que le portrait de phase d’un pendule vérifiant $\ddot{q} + M \sin q = 0$ pouvait être scindé en deux zones, délimitant les trajectoires bornées des autres. Dans notre espace des phases projeté sur $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$, nous pouvons aussi définir des séparatrices *instantanées*, dont l’équation est donnée par

$$p_s(t) = \pm 2\sqrt{M(t)} \cos \frac{q_s - \phi(t)}{2}. \quad (3.2.6)$$

Les particules se trouvant à l’intérieur de la zone ainsi délimitée et loin des bords ont toutes une trajectoire bornée, et conservent une certaine corrélation tout au long de leur mouvement. Les séparatrices préservent donc toute structure étant présente en

leur sein au cours de l'évolution du système, ce qui explique la persistance de la spirale au cours du QSS. Comme $M(t)$ fluctue au cours du temps, la zone délimitée par (3.2.6) balaie une certaine partie de l'espace des phases. Les fluctuations des séparatrices ont alors pour effet de happer ou d'expulser les particules se trouvant dans leur proximité immédiate, ce qui permet le mélange entre particules piégées et particules libres, ainsi que la destruction des corrélations entre les particules piégées constituant la structure cohérente, une fois que ces dernières atteignent ces frontières.

La figure 3.8 montre l'espace des phases instantané lors d'un QSS donné par la condition initiale

$$f_0(q, p) = \frac{1}{2\pi\Delta p} \Theta(\Delta p - |p|) \Theta(\pi - |q|), \quad (3.2.7)$$

avec $\Delta p = 0.1$. Une telle configuration, de par sa faible dispersion en impulsion, donne lieu à un comportement proche de celui d'un faisceau froid, pour lequel nous aurions eu $\Delta p = 0$. Les courbes blanches surimprimées représentent les séparatrices pour deux valeurs différentes de $M(t)$, mettant ainsi en évidence la zone de l'espace des phases à une particule où est localisé le chaos.

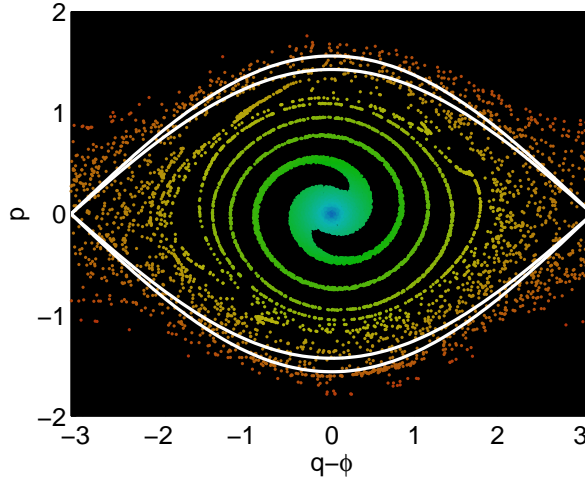


FIGURE 3.8 – Tracé de l'espace des phases instantané à une particule pour une condition initiale proche du faisceau froid, donnée par l'équation (3.2.7). Les lignes blanches représentent deux positions arbitraires des séparatrices au cours du temps, mettant ainsi en évidence la zone de l'espace des phases balayée par ces dernières.

3.2.3 Un premier indicateur de thermalisation fiable

En fait, la structure spirale “s'évapore” en perdant des particules à travers les séparatrices. La conservation de l'énergie fait que d'autres particules traversent continuellement les séparatrices et entrent dans le puits de potentiel qu'elles délimitent. Ces dernières ont alors une position dans l'espace des phases complètement décorrélée de

celles qui n'ont jamais quitté la zone de mouvement borné. À terme, toutes les particules initialement “piégées” se seront échappées au moins une fois de la séparatrice, détruisant ainsi la structure spirale en question. Au terme de cette visite de l'espace des phases à une particule, on peut s'attendre à ce que le système ait alors atteint l'équilibre thermodynamique.

Afin d'étudier la dynamique temporelle de cette évolution, nous proposons une approche inédite, basée sur l'exploration de l'espace des phases à une particule par les pendules du système. Pour ce faire, introduisons la quantité $n_\ell(t, t_0)$ (l'indice ℓ pour “left”), donnant le nombre de particules présentes à t_0 dans la séparatrice, et qui n'en sont encore jamais sorties à l'instant t . Définissons aussi le temps $\tau_\delta(N)$ par

$$\tau_\delta(N) = \inf_t \left\{ \frac{n_\ell(t, t_0)}{n_\ell(t_0, t_0)} < \delta \right\}. \quad (3.2.8)$$

Ce temps représente la durée nécessaire au système afin d'évacuer une fraction $1 - \delta$ de particules de sa séparatrice vers l'extérieur. La figure 3.9 met en évidence le fait que l'aimantation moyenne cesse de varier lorsque n_ℓ s'annule, ce qui confirme la pertinence de cet indicateur. Nous avons là un critère dont nous pouvons contrôler précisément la

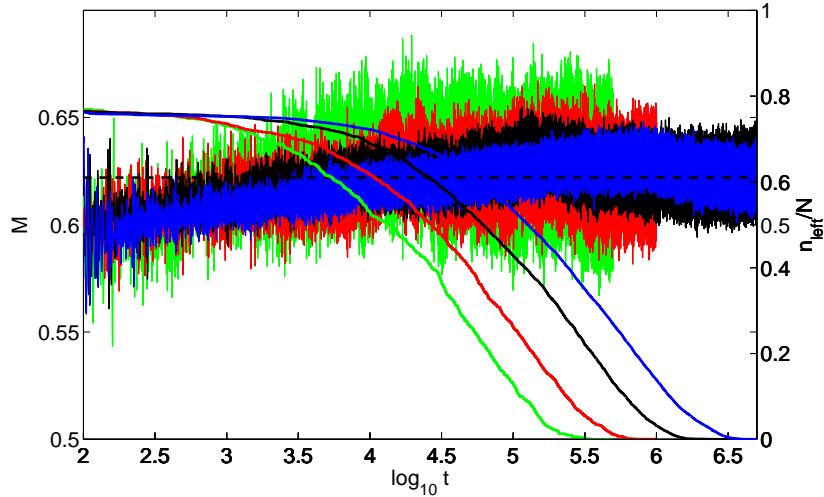


FIGURE 3.9 – Tracé de l'aimantation en fonction du temps pour le cas faisceau froid, avec différents nombres de particules (10^3 , $2 \cdot 10^3$, $5 \cdot 10^3$, et 10^4). Les courbes décroissantes représentent l'évolution de n_ℓ . L'annulation de ce dernier semble bien coïncider avec la stabilisation de l'aimantation autour de la valeur attendue, tracée en pointillés. L'échelle log en abscisse rend aussi bien compte de la proportionnalité du temps de vie avec N , l'écart entre n_ℓ pour 1000 et 2000 étant le même que celui entre 5000 et 10000, reflétant bien le facteur 2 du nombre de particules sur la dynamique.

valeur, cette dernière n'étant rien d'autre que le résultat d'un décompte de particules, et non plus une mesure soumise aux indéterminations de fluctuations temporelles.

Insistons sur le fait que malgré la sortie de particules de la séparatrice, d'autres y pénètrent constamment, assurant ainsi la conservation de l'énergie du système au cours du temps. La figure 3.10 représente la distribution des particules dans l'espace des phases et montre l'échange qui s'opère entre les particules à l'intérieur de la séparatrice et qui n'en sont jamais sorties (en rouge), et celles qui ont été au moins une fois à l'extérieur (bleues). Avec le temps, les particules "rouges" disparaissent petit à petit

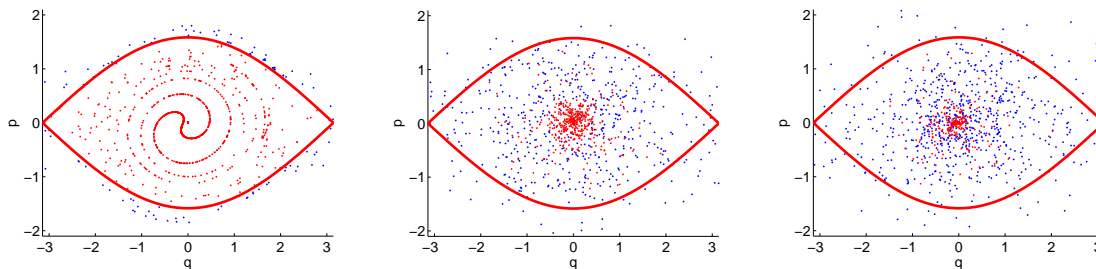


FIGURE 3.10 – De gauche à droite, les espaces des phases pour le cas faisceau froid à trois instants différents. Les particules qui étaient initialement dans la séparatrice à un instant t_0 et qui n'en sont jamais sorties sont représentées en rouge, tandis que toutes les autres sont représentées en bleu. Au cours du temps, les particules explorent l'espace des phases, les particules initialement piégées finissent par sortir, et nous assistons à la "disparition" des particules rouges en faveur des particules bleues.

au profit de particules "bleues", traduisant ainsi la visite de l'espace des phases par les particules du système, et la destruction des corrélations spatiales.

Nous allons nous efforcer de prédire le comportement temporel de n_ℓ , qui n'a, contrairement à l'aimantation, rien de chaotique dans son évolution, laissant à penser que nous pourrions l'obtenir analytiquement. La stratégie que nous allons adopter est la suivante : en remarquant que le champ moyen M obéit à des propriétés statistiques particulières, nous allons modéliser la sortie des particules de l'intérieur de la séparatrice par un problème de marche aléatoire aux bords absorbants. La quantité n_ℓ sera alors calculée exactement à partir du modèle de diffusion effectif ainsi posé.

3.3 Modélisation stochastique de l'aimantation

3.3.1 Le développement de Kramers-Moyal

Nous allons dans ce paragraphe établir de façon tout à fait générale le développement de Kramers-Moyal [72], qui nous permet de passer d'une formulation de type Langevin (équation différentielle stochastique) à une formulation en densités de probabilités (équation de Fokker-Planck).

Considérons un continuum d'états notés x , et notons $f(x, t)$ la probabilité d'un certain système de se trouver à l'état x à l'instant t . Supposons l'existence de taux

de transitions $w(i, f)$ permettant au système d'explorer l'espace des états qui lui sont accessibles en passant de l'état i à l'état f . Nous pouvons écrire que

$$f(x, t + \Delta t) = \int w(x + \Delta x, t | x, t + \Delta t) f(x + \Delta x, t) d\Delta x. \quad (3.3.1)$$

Développons l'intégrand au voisinage de $x + \Delta x$:

$$\begin{aligned} w(x + \Delta x, t | x, t + \Delta t) f(x + \Delta x, t) &= w(x, t | x - \Delta x, t + \Delta t) f(x, t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\Delta x)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [w(x, t | x - \Delta x, t + \Delta t) f(x, t)]. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

L'intégrale du taux de transition sur tous les sauts possibles Δx valant 1, l'équation (3.3.2) se réécrit alors

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \frac{\partial^k}{\partial x^k} [(-\Delta x)^k w(x, t | x - \Delta x, t + \Delta t)] f(x, t) d\Delta x. \quad (3.3.3)$$

En divisant par Δt et en faisant tendre ce dernier vers zéro, nous obtenons le développement de Kramers-Moyal

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [(-1)^k a_k(x) f(x, t)], \quad (3.3.4)$$

où les coefficients a_k sont définis par

$$a_k(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{k!} \frac{\langle (\Delta x)^k \rangle}{\Delta t}, \quad (3.3.5)$$

et où la moyenne $\langle \cdot \rangle$ est effectuée sous la distribution $w(x, t | x', t')$. La troncature au second ordre de cette expression fournit l'équation de Fokker-Planck.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [a_1(x, t) f] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a_2(x, t) f]. \quad (3.3.6)$$

3.3.2 Subtilités dues au bruit multiplicatif

Alors que le développement présenté est tout à fait général, l'évaluation précise des coefficients a_k donnés par (3.3.5) à partir d'équations différentielles stochastiques est sujette au choix d'une convention multiplicative sur le bruit.

Soit ξ un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité, intervenant dans l'équation de Langevin suivante :

$$\dot{x} = A(x) + B(x)\xi(t). \quad (3.3.7)$$

Une intégration formelle entre t et $t + \Delta t$ fournit

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} A[x(s)] ds + \int_t^{t+\Delta t} B[x(s)] \xi(s) ds. \quad (3.3.8)$$

Alors que le premier terme ne pose pas de problème conceptuel particulier, le second n'est pas défini de façon univoque. Deux interprétations sont largement utilisées dans la littérature. La convention de Itô, qui consiste à évaluer B en t ,

$$\int_t^{t+\Delta t} B(x(s)) \xi(s) ds = B[x(t)] \int_t^{t+\Delta t} \xi(s) ds \quad (3.3.9)$$

et celle de Stratonovich, qui consiste à évaluer B en $t + \Delta t/2$,

$$\int_t^{t+\Delta t} B(x(s)) \xi(s) ds = B\left[x(t) + x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right] \int_t^{t+\Delta t} \xi(s) ds. \quad (3.3.10)$$

De façon générale, introduisons le réel α tel que

$$\int_t^{t+\Delta t} B(x(s)) \xi(s) ds = B[(1-\alpha)x(t) + \alpha x(t + \Delta t)] \int_t^{t+\Delta t} \xi(s) ds. \quad (3.3.11)$$

Afin d'alléger les expressions, notons ΔW l'incrément de Wiener défini par

$$\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} \xi(s) ds. \quad (3.3.12)$$

L'équation (3.3.11) se développe alors comme

$$B[(1-\alpha)x(t) + \alpha x(t + \Delta t)] \Delta W = B[x(t)] \Delta W + \alpha x(t) A[x(t)] B'[x(t)] \Delta W \Delta t + \alpha B[x(t)] B'[x(t)] \Delta W^2 + \dots \quad (3.3.13)$$

Le développement de x s'écrit finalement, à l'ordre le plus faible en Δt ,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + A[x(t)] \Delta t + B[x(t)] \Delta W + \alpha B[x(t)] B'[x(t)] \Delta W^2 + \dots \quad (3.3.14)$$

Remarquons que l'incrément de Wiener ΔW est lui-même un processus gaussien en tant que somme continue de processus gaussiens. Sa variance s'écrit donc $\langle \Delta W^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle \Delta t$. Nous avons à présent tous les éléments pour calculer les coefficients a_1 et a_2 .

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle [x(t + \Delta t) - x(t)] \rangle$$

En utilisant (3.3.14), il vient

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(A[x(t)] \Delta t + B[x(t)] \langle \Delta W \rangle + \alpha B[x(t)] B'[x(t)] \langle \Delta W^2 \rangle + \dots \right)$$

Or $\langle \Delta W \rangle = 0$ par linéarité, ce qui donne finalement

$$a_1 = A(x) + \alpha B(x) B'(x). \quad (3.3.15)$$

Le même raisonnement conduit à l'expression de a_2 ,

$$a_2 = \frac{1}{2} B(x)^2. \quad (3.3.16)$$

Nous pouvons donc écrire une équation de Fokker-Planck généralisée, faisant intervenir le paramètre α définissant la convention de bruit multiplicatif adoptée.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(A(x) + \alpha B(x) B'(x)) f(x, t) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{B(x)^2}{2} f(x, t) \right] \quad (3.3.17)$$

3.3.3 Caractérisation statistique du champ moyen

Afin d'appliquer le formalisme précédent à notre modèle hamiltonien, nous devons caractériser les propriétés statistiques *temporelles* de l'aimantation, en vue de la remplacer par un processus stochastique bien choisi.

Tout d'abord, construisons la distribution de probabilité locale de M . Pour une fenêtre temporelle durant laquelle $M(t)$ oscille autour d'une valeur bien constante, le résultat obtenu durant un QSS proche de l'équilibre (voir figure 3.1) est donné en figure 3.11. Les fluctuations temporelles de l'aimantation sont ici très bien décrites par une gaussienne centrée sur la moyenne locale de cette dernière. Ainsi, il s'avère

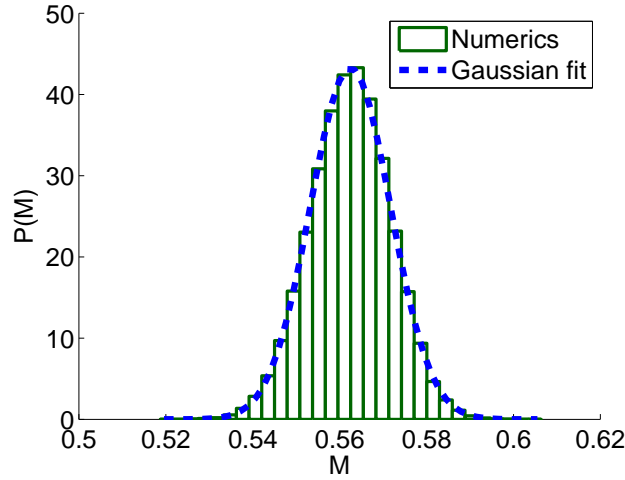


FIGURE 3.11 – L'histogramme des fluctuations de l'aimantation, prise ici dans un QSS proche de l'équilibre, est extrêmement bien décrit par une gaussienne (représentée par le trait discontinu bleu).

légitime de remplacer $M(t)$ par un processus gaussien. Cependant, nous devons aussi caractériser la corrélation temporelle d'un tel processus. On définit l'intégrale d'auto-corrélation par

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(t)M(t - \tau)dt. \quad (3.3.18)$$

Nous avons reporté en figure 3.12 une évaluation numérique de cette quantité durant le QSS. Le résultat montre que sur une échelle temporelle mésoscopique, les oscillations de l'aimantation peuvent être considérées comme sans mémoire, $C(\tau)$ étant correctement approximé par un Dirac.

En conclusion, l'aimantation peut être correctement décrite par un bruit blanc gaussien, centré sur la valeur moyenne locale de $M(t)$. Nous allons voir dans la suite comment utiliser cette remarque dans l'objectif de décrire l'évolution du système vers l'état d'équilibre.

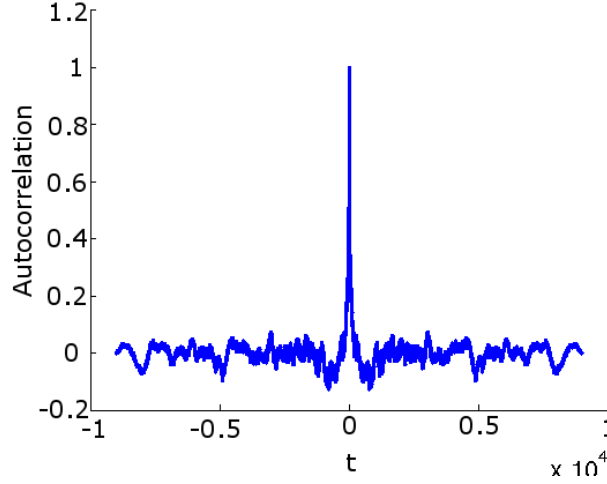


FIGURE 3.12 – Fonction d’auto-corrélation de l’aimantation dans un cas QSS proche de l’équilibre. Au vu des échelles temporelles en jeu, il est raisonnable de considérer l’aimantation comme un processus delta-corrélé.

3.3.4 Première application au HMF

Nous venons de voir que l’aimantation, bien que déterministe, exhibe des propriétés statistiques intéressantes sur des échelles temporelles mésoscopiques. Décomposons l’aimantation comme suit

$$M(t) = M_0 + \xi(t). \quad (3.3.19)$$

Il est important de noter que les propriétés statistiques de ξ vont dépendre de N . Plus particulièrement, posons

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (3.3.20)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = C(N)\delta(t - t') \quad (3.3.21)$$

La quantité $C(N)$ décrit donc l’amplitude des fluctuations temporelles de l’aimantation. Sa loi d’échelle avec N sera discutée un peu plus tard. Les équations du mouvement se réécrivent alors

$$\dot{q}_i = p_i \quad (3.3.22)$$

$$\dot{p}_i = -(M_0 + \xi(t)) \sin(q - \phi(t)). \quad (3.3.23)$$

En convention Itô, l’équation de Fokker-Planck associée au système de Langevin ainsi défini s’écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p} \left[M_0 \sin(q - \phi) f(q, p, t) \right] = \frac{C(N)}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left[\sin^2(q - \phi) f(q, p, t) \right]. \quad (3.3.24)$$

Faisons à présent l’hypothèse que f se factorise comme $f(q, p, t) = \tilde{f}(p, t)g(q, t)$. Cette hypothèse est très forte, mais motivée par le fait que les QSS que nous étudions sont

proches de l'équilibre. En effet, la distribution d'équilibre étant séparable, nous nous attendons à ce que ce soit aussi le cas pour celle du QSS, du moins sur une échelle de temps mésoscopique. Notons que cette approche est différente de celle de Joyce, ce dernier s'appuyant justement sur le critère de séparabilité (3.2.5) afin de distinguer le QSS de l'équilibre. Sans perte de généralité, considérons que $g(q)$ est une distribution centrée sur ϕ .

Intégrons l'équation de Fokker-Planck (3.3.24) sur q . Sous les deux hypothèses énoncées ci-dessus, nous obtenons une simple équation de diffusion

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{C(N)}{2} \langle \sin^2(q - \phi(t)) \rangle_g \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} = \mathcal{D}(t) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2}. \quad (3.3.25)$$

Il est facile de vérifier que cette équation ne dépend pas du choix de convention multiplicative adopté lors de l'écriture de l'équation de Fokker-Planck. Sans précision supplémentaire sur le support de \tilde{f} , cette équation de diffusion prédit que l'impulsion de toute particule tendra asymptotiquement vers l'infini. Notons que ceci est cohérent avec le fait d'avoir une excitation paramétrique dans (3.3.23) dans laquelle toutes les fréquences sont représentées.

Le système réel ne se comporte évidemment pas de la sorte. Aussi allons-nous restreindre cette équation de diffusion à un domaine d'impulsions délimité par les positions angulaires moyennes des séparatrices. De plus, nous admettrons que cette modélisation ne concerne que la population de particules s'échappant pour la première fois de la séparatrice.

Avant d'arriver au but, qui est de prédire l'évolution temporelle de n_ℓ , remarquons que le temps caractéristique de la dynamique temporelle est totalement contenu dans l'expression du coefficient de diffusion \mathcal{D} , qui reste à évaluer. Penchons-nous tout d'abord sur $C(N)$. Cette grandeur caractérise l'amplitude des fluctuations temporelles de l'aimantation autour de la valeur M_0 du QSS³. L'expérience montre que $C(N) \propto 1/N$ (figure 3.13), tout comme les fluctuations d'ensemble, bien que ce soient là deux phénomènes bien différents.

Afin d'obtenir une évaluation plus fine qu'un simple *scaling* des fluctuations, il est possible d'approximer ces dernières par leur valeur d'équilibre, calculée dans l'ensemble microcanonique, ce dernier étant l'ensemble *naturel* des simulations numériques. Motivés par le fait d'avoir $M_0 \sim \langle M \rangle_\mu = \langle M \rangle_c$ pendant le QSS, nous reprenons le calcul explicité au paragraphe 1.5.2. En omettant la notation $\langle \cdot \rangle_\mu$ par souci de clarté, l'équation (1.5.13) se réécrit

$$\langle \delta^2 M \rangle_\mu = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{\beta^2 M^2}{\psi''(\beta M, \beta)} - \frac{2}{\beta} - \frac{2(\partial_\beta M)^2}{\beta^{-2} + 2M\partial_\beta M} \right] + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (3.3.26)$$

où nous rappelons que ψ'' est donnée par

$$\psi''(v, \beta) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{I_1(v)}{I_0(v)} \right)^2 - \frac{I_0(v) + I_2(v)}{2I_0(v)}. \quad (3.3.27)$$

3. La figure 3.9 montre qu'en réalité, la valeur moyenne locale de l'aimantation durant le QSS augmente avec le temps. Nous négligeons implicitement cette variation temporelle, celle-ci n'apportant que des corrections négligeables au résultat final.

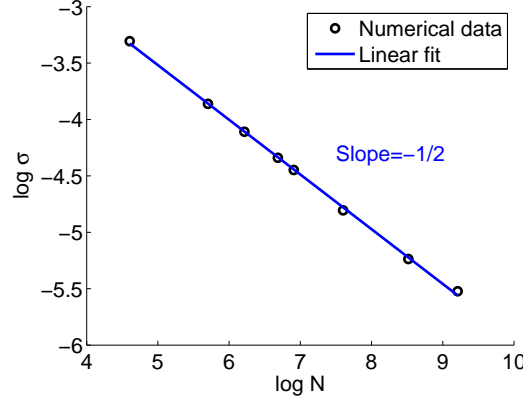


FIGURE 3.13 – Tracé des fluctuations de l'aimantation autour de sa valeur QSS pour différentes valeurs de N . Nous trouvons bien $C(N) \sim \sigma^2 \propto N^{-1}$.

De même, nous pouvons évaluer $\langle \sin^2(q - \phi) \rangle_g$ en utilisant sa moyenne canonique (qui coïncide avec son homologue microcanonique). Il vient

$$\langle \sin^2(q - \phi) \rangle_c = \frac{\int \sin^2 q e^{\beta M \cos q} dq}{\int e^{\beta M \cos q} dq},$$

et finalement

$$\langle \sin^2(q - \phi) \rangle_g \simeq \frac{I_1(\beta M)}{\beta M I_0(\beta M)}, \quad (3.3.28)$$

où M est égal à sa valeur canonique. Finalement, nous accédons à l'expression du coefficient de diffusion dans l'approximation du QSS proche de l'équilibre :

$$\mathcal{D} \simeq \frac{I_1(\beta M)}{\beta M I_0(\beta M)} \langle \delta^2 M \rangle_\mu. \quad (3.3.29)$$

Toute l'information sur la dynamique temporelle est contenue dans ce coefficient de diffusion. En remarquant que $\mathcal{D} \propto N^{-1}$, en vertu de l'équation de diffusion (3.3.25), le temps caractéristique d'évolution de la distribution d'impulsions \tilde{f} diverge comme N , ce qui présage déjà du résultat attendu.

3.3.5 Résultats

Nous souhaitons initialement prédire l'évolution du nombre n_ℓ de particules piégées. Or l'équation (3.3.25) décrit la dynamique des particules en impulsion, après moyenne sur les positions. Définissons deux frontières dans l'espace des impulsions par $p = \pm \lambda$. En choisissant $\lambda = 4\sqrt{M}/\pi$, nous obtenons l'impulsion moyenne de la séparatrice sur $[-\pi, \pi]$. La quantité n_ℓ s'approxime alors bien par

$$n_\ell(t, t_0) \simeq n_\ell(t_0, t_0) \int_{-\lambda}^{\lambda} \tilde{f}(p) dp. \quad (3.3.30)$$

Il s'agit finalement de résoudre un problème de diffusion aux conditions de bords absorbantes : les particules diffusent librement dans l'intervalle $]-\lambda, \lambda[$, et sont absorbées lorsqu'elles arrivent aux bords.

Résolvons à présent l'équation (3.3.25) en partant d'une condition initiale à $t = t_0$ donnée par $\tilde{f}_0(p) = \tilde{f}(p, t = t_0)$. Après une séparation des variables p et t , on obtient

$$\frac{n_\ell(t, t_0)}{n_\ell(t_0, t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}c_n}{(2n+1)\pi} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\lambda^2}\mathcal{D}t\right), \quad (3.3.31)$$

les coefficients c_n étant obtenus en effectuant le produit scalaire $\langle \tilde{f}, \tilde{f}_0 \rangle$,

$$c_n = \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} \tilde{f}_0(p) \cos\left(\frac{(2n+1)p\pi}{2\lambda}\right) dp}{\int_{-\lambda}^{\lambda} \tilde{f}_0(p) dp}. \quad (3.3.32)$$

L'essentiel ici est de remarquer que toute la dépendance en N de n_ℓ est donnée par le coefficient de diffusion \mathcal{D} , qui conditionne la vitesse de décroissance des modes présents dans (3.3.31). Nous pouvons à présent faire le lien avec le temps $\tau_\delta(N)$, qui, rappelons-le, est le temps nécessaire au système pour évacuer une fraction $1 - \delta$ d'une quantité initiale de particules présentes dans la séparatrice. D'après (3.3.31), il vient $\delta \propto e^{\tau_\delta(N)/N}$, c'est-à-dire

$$\tau_\delta(N) \propto -N \log \delta \quad (3.3.33)$$

La figure 3.14 compare les prédictions de la loi d'échelle (3.3.33) avec les simulations numériques. On constate que le temps mis par le système pour évacuer une fraction $1 - \delta$ de particules croît linéairement en N , et vérifie relativement bien la dépendance logarithmique avec le seuil δ . De plus, malgré les hypothèses faites sur la distribu-

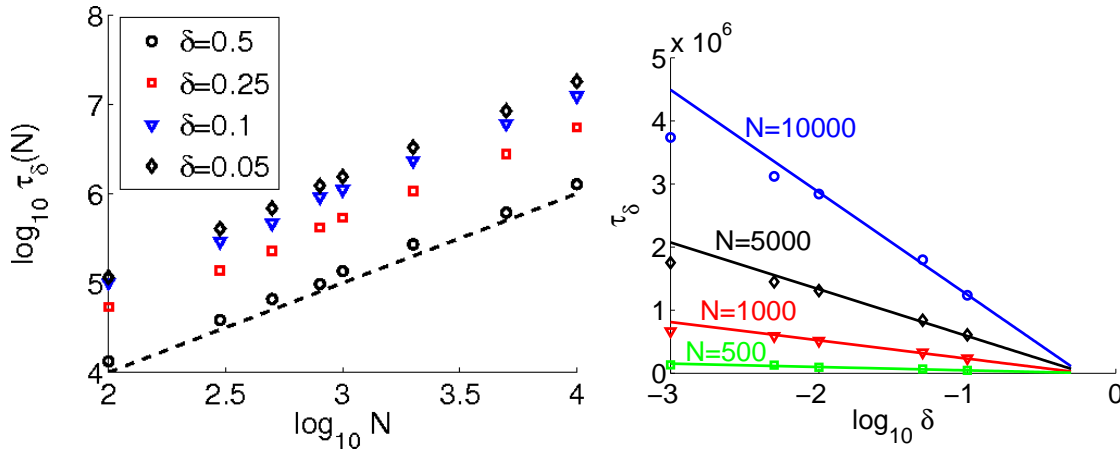


FIGURE 3.14 – (À gauche) Tracé de $\tau_\delta(N)$ en fonction de N . On retrouve un comportement linéaire, indépendamment de la valeur seuil de δ . (À droite) Dépendance de τ_δ en fonction du seuil choisi. L'accord avec la prédiction théorique (3.3.33) est acceptable.

tion $f(q, p, t)$ lors de l'intégration de l'équation de Fokker-Planck, l'expression (3.3.31) approxime très bien le comportement mesuré numériquement, comme en atteste la figure 3.15, qui compare le résultat d'une diffusion libre avec le QSS issu d'un waterbag d'énergie $U = 0.55$.

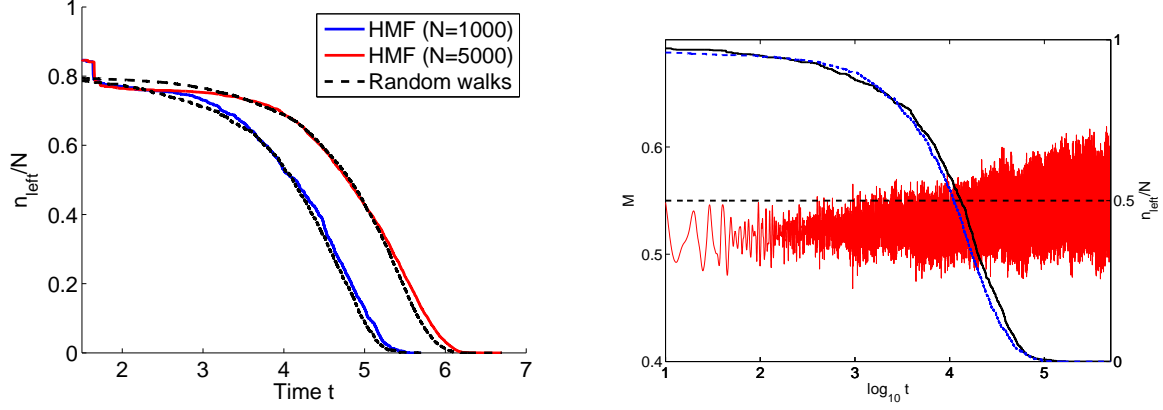


FIGURE 3.15 – (À gauche) Comparaison dans le cas faisceau froid entre les diffusions libres de particules dont l'expression (3.3.31) est solution (pointillés) et les mesures numériques sur n_ℓ (traits pleins), pour $N = 1000$ et $N = 5000$ particules. (À droite) Le trait plein oscillant représente l'aimantation en fonction du temps en partant d'un waterbag homogène à énergie $U = 0.55$. Cette dernière converge lentement vers sa valeur d'équilibre, atteinte lorsque n_ℓ s'annule (trait noir plein). Le trait pointillé représente la prédiction donnée par (3.3.31).

3.3.6 Remarques sur l'équilibre

Une fois que le système a atteint l'aimantation prédite par le calcul canonique, les fluctuations ne cessent pas, et nous continuons d'observer des particules qui s'échappent de la séparatrice. La figure 3.16 représente le temps moyen de premier passage à travers la séparatrice en fonction de la position initiale des particules, pour un équilibre d'énergie $U = 0.55 < U_c$. Comme l'on pouvait le pressentir, les particules du centre de la résonance apparaissent comme étant les plus lentes à s'en échapper.

Dans le cas où $U > U_c$, l'aimantation d'équilibre est nulle. Ainsi, il n'existe pas de séparatrice, et toutes les particules se déplacent librement le long de tores d'impulsion constante. La distribution angulaire étant homogène à l'équilibre, l'étude de la relaxation d'une particule test dans un bain est alors faisable. L'évolution de la distribution $f_1(q, p, t = 0) = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$ obéit à l'équation de Fokker-Planck [48, 73]

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \left[D(p) \left(\frac{\partial f_1}{\partial p} - \frac{1}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial p} f_1 \right) \right], \quad (3.3.34)$$

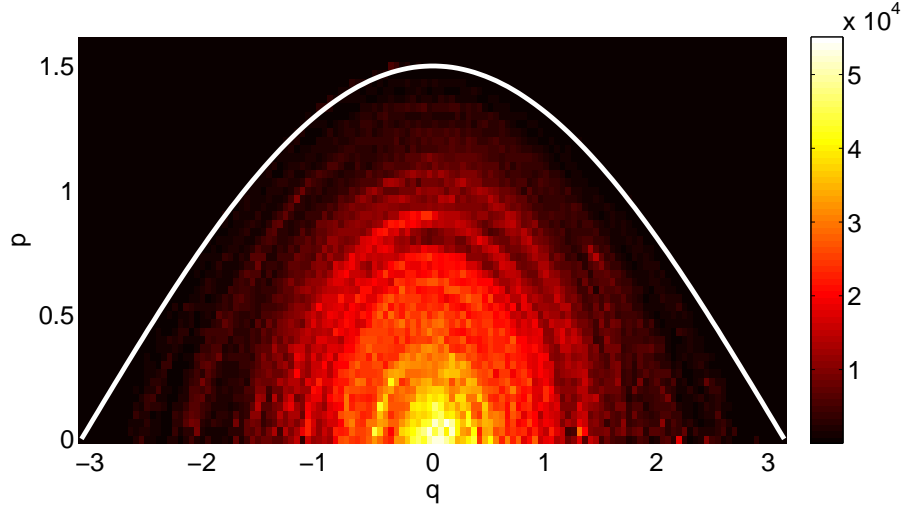


FIGURE 3.16 – En couleur, le temps moyen de premier passage à travers la séparatrice en fonction de la position initiale dans le demi-espace des phases à une particule supérieur pour une situation d'équilibre d'énergie $U = 0.55$. La courbe blanche indique l'emplacement de la séparatrice supérieure.

où f_0 est la distribution d'équilibre. et où le coefficient de diffusion s'exprime comme

$$D(p) = \frac{\pi^2}{N} \frac{f_0(p)}{\left[1 + \epsilon\pi\mathcal{P} \int \frac{f'_0}{u-p} du\right] + \pi^4 f'_0(p)^2} \quad (3.3.35)$$

Nous retrouvons dans $D(p)$ le comportement en $1/N$ qui fournit encore une fois le temps caractéristique de relaxation, bien qu'il ne corresponde pas ici au temps de vie d'un quelconque état quasistationnaire. Il est possible de généraliser cette approche pour des distributions stationnaires différentes de l'équilibre, en utilisant à bon escient le formalisme action-angle introduit au paragraphe 1.3.2.

Chavanis, en référence [73], va plus loin en développant un formalisme action-angle prenant en compte les effets collectifs. L'équation cinétique à laquelle il aboutit décrit le comportement global de distributions de particules hors de l'équilibre, et non plus seulement la relaxation de distributions test. Nous introduirons certains concepts similaires au Chapitre 4, mais nous nous heurterons bien vite à une difficulté technique de taille : le coefficient de diffusion intervenant dans cette étude n'est pas calculable analytiquement, notamment à cause de l'absence d'information sur la distribution QSS.

Chapitre

4

Un QSS particulier...

[Un état quasistationnaire à la durée de vie intrigante]

Sommaire

4.1	Introduction	67
4.2	Réflexion sur l'ergodicité	70
4.2.1	Ergodicité et postulat fondamental	70
4.2.2	Équation de Liouville	72
4.2.3	Systèmes mélangeants	73
4.2.4	Interprétation des états QSS	74
4.3	Modélisation stochastique des trajectoires	75
4.3.1	Développement perturbatif	75
4.3.2	Principe général	77
4.3.3	Mesure numérique du coefficient de diffusion	78
4.3.4	Le cas problématique “1.7”	80
4.3.5	Temps de premier passage	83
4.3.6	Comparaison avec la simulation numérique	85
4.3.7	Note sur l'établissement du QSS	85
4.4	Discussion générale	88

4.1 Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous avons décrit la marche vers l'équilibre du modèle HMF en nous appuyant sur le cas paradigmatique que représente le faisceau froid. L'existence de séparatrices “macroscopiques”¹ a permis de comprendre comment s'effectue la thermalisation, en introduisant un nouvel indicateur, basé sur le nombre de particules piégées dans le puits de potentiel. La destruction des structures cohérentes présentes dans cette zone de l'espace des phases à une particule s'avère être

1. C'est-à-dire que la fraction de particules piégées est de l'ordre de 1.

indispensable afin que la distribution de particules converge finalement vers l'équilibre attendu. Nous avons retrouvé, par une modélisation stochastique de l'aimantation, que les états quasistationnaires ainsi décrits subsistaient sur des durées dont la loi d'échelle est proportionnelle au nombre de particules N .

Cependant, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1, la condition initiale waterbag spatialement homogène à $U = 0.69$ initie un QSS pour lequel, sur l'intervalle de N considéré, le temps mis par le système pour s'échapper du QSS semble augmenter proportionnellement à N^α , où $\alpha = 1.7$. Cette loi d'échelle, bien qu'approximative, est très bien encadrée numériquement, au sens où l'exposant α est mesuré à 0.1 près [49, 50]. Cette loi d'échelle est la source de vifs débats au sein de la communauté depuis une dizaine d'années, et c'est pourquoi nous allons dédier un chapitre entier à ce cas particulier, en l'abordant dans le même esprit de modélisation stochastique que ce qui a été fait au Chapitre 3.

Rappelons d'abord la distribution initiale de particules considérée ici :

$$f_{\text{WB}}(q, p) = \frac{1}{2\pi\Delta p} \Theta(\Delta p - |p|) \Theta(\pi - |q|), \quad (4.1.1)$$

avec $U = 0.69$, ce qui revient à fixer la largeur en impulsion à $\Delta p \simeq 1.07$. À nombre de particules N fini, en vertu du théorème central limite, la répartition uniforme de particules sur le cercle donne lieu à une aimantation initiale $M \sim N^{-1/2}$, dont l'ordre de grandeur est conservé durant le QSS à cause du caractère Vlasov-stable de la distribution (4.1.1). Numériquement, les fluctuations temporelles suivent de nouveau une loi d'échelle en $N^{-1/2}$, et sont du même ordre de grandeur que l'aimantation. Par conséquent, la notion de piégeage n'a plus de sens, le temps mis par les particules à l'intérieur des séparatrices pour en sortir étant cette fois-ci très faible par rapport au temps de vie du QSS. De plus, la fraction de particules piégées à un instant donné n'est pas significative, et décroît avec le nombre de particules comme $N^{-1/4}$. Face à l'absence de structures cohérentes dont la persistance est conditionnée par l'existence de séparatrices "macroscopiques" ($M = O(1)$), nous devons trouver un nouvel indicateur permettant non seulement d'estimer la loi d'échelle du temps de vie d'un tel QSS, mais aussi d'en comprendre la phénoménologie.

Une étude géométrique très intéressante de l'espace des phases à une particule est à souligner : Bachelard et al., en référence [74] ont mis en évidence une transition de phase hors d'équilibre entre différentes topologies d'espaces de phases à une particule durant les QSS à partir de conditions initiales "waterbag". La figure 4.1, extraite de cette référence, montre que la structure de l'espace des phases à une particule peut admettre ou non des séparatrices macroscopiques en fonction de l'aimantation initiale choisie, à énergie donnée. Les auteurs démontrent ainsi que l'existence de séparatrices macroscopiques n'est pas garantie pour un vaste ensemble de conditions initiales, qui peuvent donner lieu à des amas de particules localisés au voisinage des bords horizontaux de la distribution. La stratégie que nous allons adopter réside dans l'étude de la visite de l'espace des phases à une particule par les pendules du HMF. Nous allons dans un premier temps motiver cette approche en interprétant, du point de vue de l'analyse fonctionnelle des systèmes dynamiques, l'émergence et la destruction des états QSS. Nous présenterons ensuite la méthode d'étude du cas particulier (4.1.1), basée sur la

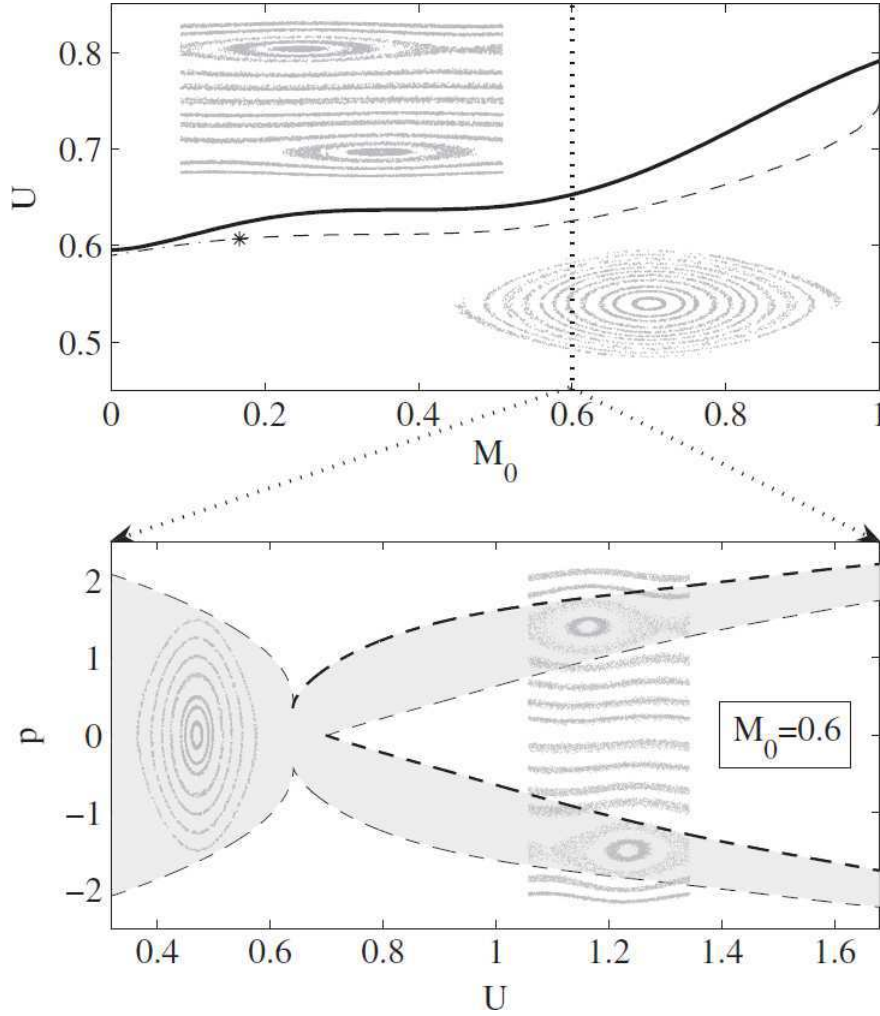


FIGURE 4.1 – Diagramme de phase de la topologie de l'espace des phases pour une condition initiale waterbag, en fonction de l'énergie U et de l'aimantation initiale M_0 . La courbe en pointillés de la figure du haut représente la prédiction par la théorie de Lynden-Bell, tandis que la courbe pleine reproduit le seuil de transition observé numériquement. Les insets montrent les sections de Poincaré de l'espace des phases à une particule obtenues grâce à des particules test. Deux cas de figure se présentent alors : soit le HMF persiste dans un état d'aimantation microscopique $o(1)$ et présente deux clusters de particules situés au voisinage des bords de la distribution, soit l'aimantation relaxe vers une valeur macroscopique $O(1)$, et permet la persistance de structures cohérentes dont la durée de vie est linéaire en N . Pour plus de détails, voir [74].

phénoménologie du transport stochastique des particules durant le QSS. Nous concluons finalement grâce au calcul d'un temps de premier passage, qui reproduit avec succès les observations numériques.

4.2 Réflexion sur l'ergodicité

4.2.1 Ergodicité et postulat fondamental

Nous allons illustrer dans ce paragraphe le concept d'hypothèse ergodique au sens où les physiciens l'emploient. Pour ce faire, considérons un oscillateur harmonique à une dimension. Notons $\Gamma = S_{2\pi} \times \mathbb{R}$ l'espace des phases de cet oscillateur. La trajectoire temporelle de ce dernier est donnée par

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (4.2.1)$$

$$p(t) = -\omega q_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (4.2.2)$$

où q_0 est l'amplitude du mouvement et ϕ la phase à l'origine. L'énergie ε du système est entièrement définie par ses conditions initiales, et sa dynamique est bien évidemment conservative. Nous avons en effet à tout instant

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2} \omega^2 q_0^2. \quad (4.2.3)$$

En utilisant la périodicité du mouvement, la moyenne temporelle d'une observable quelconque f s'écrit

$$\langle f \rangle_t = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt. \quad (4.2.4)$$

Prenons par exemple comme observables q et q^2 . Les moyennes temporelles de ces dernières se calculent donc facilement selon

$$\langle q \rangle_t = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} q_0 \cos(\omega t + \phi) dt = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\langle q^2 \rangle_t = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} q_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{q_0^2}{2}. \quad (4.2.6)$$

De façon générale, l'hypothèse ergodique consiste à postuler l'égalité des moyennes temporelles et des moyennes d'ensemble, souvent calculées dans l'ensemble microcanonique, selon une mesure uniforme sur l'espace des phases accessible, ce qui traduit mathématiquement le célèbre postulat : *à l'équilibre, tous les micro-états accessibles sont équiprobables.*

Formellement, ce postulat revient à définir une mesure associant la même probabilité à tous les éléments d'hypersurface d'énergie constante ε . En notant μ une telle mesure, nous avons

$$d\mu = \frac{\delta(\varepsilon - \frac{1}{2}\omega^2 q_0^2) dq dp}{\iint \delta(\varepsilon - \frac{1}{2}\omega^2 q_0^2) dq dp}. \quad (4.2.7)$$

Effectuons le changement de variables $(q, p) \rightarrow (q_0, \phi)$. Il vient

$$q = q_0 \cos \phi, \quad (4.2.8)$$

$$p = -\omega q_0 \sin \phi, \quad (4.2.9)$$

ce qui fournit par ailleurs

$$dq dp = \omega q_0 dq_0 d\phi, \quad (4.2.10)$$

Ce changement de variable nous permet de calculer exactement la normalisation de la mesure microcanonique. En effet,

$$\begin{aligned} \iint \delta \left[\varepsilon - \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \right] dp dq &= \iint \delta \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \omega^2 q_0^2 \right) \omega q_0 dq_0 d\phi \\ &= 2\pi \sqrt{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de la moyenne microcanonique d'une observable $f(q, p)$ s'écrit

$$\langle f \rangle_\mu = \left(2\pi \sqrt{2\varepsilon} \right)^{-1} \int f \left(\sqrt{2\varepsilon}/\omega, \phi \right) \sqrt{2\varepsilon} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi. \quad (4.2.11)$$

Reprenons les deux observables q et q^2 . Leurs moyennes d'ensemble s'écrivent donc

$$\langle q \rangle_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_0 \cos(\omega t + \phi) d\phi = 0 \quad (4.2.12)$$

$$\langle q^2 \rangle_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) d\phi = \frac{q_0^2}{2}. \quad (4.2.13)$$

Nous retrouvons bien là les valeurs temporelles données par les équations (4.2.5) et (4.2.6). Intuitivement, mesurer la moyenne d'une observable f pour l'oscillateur harmonique au cours du temps donne le même résultat qu'une moyenne sur un ensemble d'oscillateurs à un instant donné, vérifiant une répartition uniforme des phases.

Ainsi, en physique statistique, la notion d'équilibre correspond à un concept "ensembliste". Il n'y a *pas* de définition mathématiquement claire de ce qu'est l'équilibre macroscopique au sens strict. Notons de plus que si l'on suppose que l'espace des phases est à volume fini, c'est-à-dire que

$$\int \delta(\varepsilon - \mathcal{H}(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}) < \infty, \quad (4.2.14)$$

où μ est ici simplement la mesure de Lebesgue, alors le théorème de récurrence de Poincaré [75] dit que le flot hamiltonien, à partir de presque toutes les conditions initiales, va repasser une infinité de fois et aussi près que l'on veut de la configuration initiale, et c'est trivialement le cas de l'oscillateur harmonique (4.2.1)-(4.2.2).

Comment comprendre alors l'évolution vers l'équilibre de systèmes à l'aune de ce théorème, sachant que ces derniers, si l'on attend suffisamment longtemps, vont revenir à leur état initial, *a priori* différent de l'équilibre? Notons tout d'abord que le temps de récurrence peut être astronomique. L'exemple le plus célèbre concerne le temps de récurrence d'un litre de gaz parfait, estimé à plusieurs ordres de grandeur au-dessus de

l'âge de l'univers... De plus, d'un point de vue statistique, si l'on considère un ensemble de réalisations du même système, à énergie donnée, il importe peu de savoir qu'un système particulier retrouve une configuration proche de son état initial, les autres réalisations de ce dernier n'observant pas la récurrence au même instant.

Un modèle à la dynamique simple, élaboré en 1956 par Mark Kac [76, 77], permet de mettre en évidence numériquement ces temps de récurrence, habituellement inaccessibles pour des systèmes hamiltoniens dont le nombre de degrés dépasse quelques dizaines.

Afin d'étudier la relaxation d'un système vers l'équilibre, nous devons faire le lien avec le flot hamiltonien de ce dernier. Nous allons voir que la relaxation vers l'équilibre microcanonique est conditionnée par une propriété particulière, plus forte que la simple ergodicité.

4.2.2 Équation de Liouville

Considérons à présent un système hamiltonien \mathcal{H} à N degrés de liberté défini par ses coordonnées généralisées q_i et leur moments conjugués p_i . Nous noterons de façon générale $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ le vecteur de Γ à $2N$ composantes.

Considérons une densité d'états $\rho(\mathbf{x}, t)$ sur Γ . En notant $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, la conservation locale de la densité de probabilité s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.2.15)$$

De plus, remarquons que

$$\text{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = 0, \quad (4.2.16)$$

en vertu des équations du mouvement de Hamilton. En effet,

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} \right] = 0. \quad (4.2.17)$$

Or comme $\text{div} \rho \mathbf{v} = \rho \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho$, nous obtenons finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = 0. \quad (4.2.18)$$

Ceci n'est ni plus ni moins que l'équation de Liouville, qui, sous une forme plus compacte s'écrit simplement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, \mathcal{H}\} = 0. \quad (4.2.19)$$

Considérons le cas d'une densité ρ qui ne soit fonction que de quantités conservées par la dynamique hamiltonienne. Formellement, posons

$$\rho \equiv \rho(I_1, I_2, \dots, I_\ell), \quad (4.2.20)$$

avec les invariants I_k vérifiant

$$\frac{dI_k}{dt} = \{I_k, \mathcal{H}\} = 0. \quad (4.2.21)$$

En développant le crochet de Poisson de l'équation de Liouville (4.2.19), nous obtenons

$$\{\rho, \mathcal{H}\} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial I_k} \left[\frac{\partial I_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial I_k}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = 0, \quad (4.2.22)$$

où nous avons utilisé l'égalité (4.2.21) pour conclure. Nous déduisons de (4.2.22) qu'une telle densité ρ vérifie

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.2.23)$$

La densité microcanonique, qui ne dépend que de l'énergie du système ($\rho_\mu \equiv \rho(\varepsilon)$), tombe bien évidemment dans cette catégorie, et nous comprenons qu'il s'agit là d'une solution stationnaire de l'équation de Liouville.

4.2.3 Systèmes mélangeants

Comme nous venons de le voir, la distribution microcanonique n'est pas l'unique solution stationnaire de l'équation de Liouville. Cependant, le théorème de Riesz-Markov [78] nous garantit l'existence d'une *unique* mesure invariante par le flot hamiltonien et vérifiant la localisation sur une hypersurface d'énergie donnée. En effet, la mesure de Lebesgue par exemple, bien qu'uniforme et invariante, ne vérifie pas la propriété de localisation.

L'unicité de la distribution microcanonique comme seul point fixe de l'équation de Liouville et satisfaisant la localisation en énergie étant établie, rien ne nous interdit de préparer initialement un ensemble de réalisations (à énergie donnée) d'un même système selon une distribution non uniforme. Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique présenté au paragraphe (4.2.1). Bien que ce système présente la propriété d'être ergodique, une distribution initiale quelconque ne converge pas vers la distribution uniforme, synonyme d'équilibre microcanonique. En effet, la différence de phase entre deux oscillateurs quelconques reste constante au cours du temps. La distribution ρ correspondante est une solution stationnaire de l'équation de Liouville. Les moyennes sur l'espace des phases restent égales aux moyennes temporelles², mais l'ensemble statistique d'oscillateurs ne se rapprochera jamais vers la situation d'équilibre microcanonique, pour laquelle les phases sont uniformément distribuées.

Les systèmes dits “mélangeants” ont par contre la particularité de faire évoluer n'importe quelle distribution initiale ρ vers la densité uniforme dans l'espace des phases. Formellement, quelle que soit la densité d'états initiale ρ , la mesure d'une observable f quelconque vérifie

$$\int \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}) d\mu \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\int f(\mathbf{x}) \delta(\varepsilon - \mathcal{H}(\mathbf{x})) d\mu}{\int \delta(\varepsilon - \mathcal{H}(\mathbf{x})) d\mu} \quad (4.2.24)$$

2. à condition d'opter pour la définition adéquate pour la moyenne sur l'espace des phases, à savoir $\langle f \rangle = \int f(\mathbf{x}) \delta(\varepsilon - H(\mathbf{x})) d\mu / \int \delta(\varepsilon - H(\mathbf{x})) d\mu$.

La prédiction microcanonique se révèle donc être vérifiée dans la limite asymptotique $t \rightarrow \infty$ pour ces systèmes. La propriété de mélange permet donc d'affirmer qu'un système va évoluer vers l'équilibre si on le laisse dans un état hors d'équilibre à un instant donné. Gardons cependant à l'esprit que les "états" dont il est question ici ne sont nullement de simples configurations sur l'espace des phases à une particule, mais des *distributions* sur l'espace des phases complet !

4.2.4 Interprétation des états QSS

Dans le cas du modèle HMF, dès lors que nous effectuons une simulation numérique, nous étudions de fait *une* réalisation temporelle de la dynamique, sur un intervalle de temps bien évidemment fini. En attendant suffisamment longtemps, nous observerions, en vertu du théorème de récurrence de Poincaré, un retour du système proche de sa condition initiale. Si nous ajoutons l'hypothèse ergodique, alors les mesures de champ moyen vérifieraient, en notant Γ l'espace des phases,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M(t) dt = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int M(\mathbf{x}) \delta(\varepsilon - \mathcal{H}(\mathbf{x})) d\mu. \quad (4.2.25)$$

La trajectoire du flot hamiltonien va "remplir" de façon uniforme l'hypersurface d'énergie ε . Le fait d'observer après un régime transitoire, correspondant au QSS, une distribution $f(q, p)$ donnée par (1.3.23) reflète simplement le fait que cette distribution est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov (voir section 1.4.2), au même titre que l'état QSS aurait pu l'être. Notons que la moyenne d'ensemble du membre de droite de l'équation (4.2.25) fait intervenir ces états dits hors d'équilibre, avec un poids statistique égal à celui d'une configuration d'équilibre microcanonique.

Dans la limite où $N \rightarrow \infty$, remarquons que l'hypothèse principale du théorème de récurrence de Poincaré, donnée par l'équation (4.2.14), est invalidée pour certaines conditions initiales. En effet, si l'on choisit une configuration initiale solution stationnaire de Vlasov, le champ moyen $M(t)$ ne dépendra pas du temps dans la limite $N \rightarrow \infty$. L'infinité de pendules constituant le HMF se retrouvent donc découplés, et l'espace des phases devient totalement séparable : chaque sous-espace $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$ est de mesure non-nulle et invariant, ce qui empêche le système d'être ergodique³. Le couplage entre les oscillateurs apparaît là être un ingrédient fondamental pour l'ergodicité.

Ainsi, la dynamique temporelle macroscopique observée pour une réalisation particulière du HMF gagnerait à être décrite en étudiant l'exploration de l'espace des phases accessible au système. Nous allons par la suite nous restreindre à la projection de Γ sur l'espace des phases à une particule $S_{2\pi} \times \mathbb{R}$, et tenter de comprendre concrètement ce qui limite temporellement l'évolution du flot hamiltonien vers un état topologiquement éloigné du QSS.

3. Une définition équivalente d'un système ergodique consiste à dire que les seuls ensembles invariants sont de mesure nulle ou unité.

4.3 Modélisation stochastique des trajectoires

Après cette brève incursion dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, revenons au problème initial, qui est de comprendre le résultat fourni par les mesures numériques du temps de vie du QSS résultant du waterbag spatialement homogène (4.1.1), à savoir un temps de relaxation proportionnel à $N^{1.7}$. Parmi les approches déjà tentées dans la littérature, la plus aboutie consiste à dériver une théorie cinétique en variables action-angle, adaptées au caractère stationnaire vis à vis de l'équation de Vlasov de la distribution QSS. Après avoir présenté succinctement cette théorie et mis en évidence l'impossibilité de l'utiliser telle quelle afin de résoudre le problème du temps de vie, nous décrirons en détail notre modélisation, basée là encore sur une approche stochastique.

4.3.1 Développement perturbatif

Nous nous proposons dans ce paragraphe de rappeler les fondements sur lesquels repose la théorie cinétique que l'on retrouve dans les références [36, 73, 79]. L'état QSS étudié est Vlasov-stable, ainsi, dans la limite $N \rightarrow \infty$, le champ moyen $M(t)$ ne dépend plus du temps, et la dynamique du modèle est intégrable⁴. Il est alors judicieux d'effectuer une transformation canonique pour se placer en variables action-angle. Posons pour cela le hamiltonien intégrable

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2} - M \cos q_i \right] = \sum_{i=1}^N h_i. \quad (4.3.1)$$

Le champ moyen M est ici constant, et correspondrait à la moyenne temporelle de l'aimantation dans le cas d'un QSS. Cet hamiltonien fournit la dynamique intégrable de N pendules d'énergie h_i , pouvant être représentés en variables action-angle, dont nous rappelons la définition ici, en fonction de l'énergie h d'un seul oscillateur :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(h + M \cos q)} dq, \quad (4.3.2)$$

$$\theta = \frac{dh}{dJ} \int \frac{dq}{\sqrt{2(h + M \cos q)}}. \quad (4.3.3)$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors simplement

$$\frac{dJ_i}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{dh}{dJ}. \quad (4.3.4)$$

L'action de chaque particule est donc complètement déterminée par sa position initiale dans l'espace des phases. Posons à présent le potentiel d'interaction

$$\mathcal{H}_I = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \cos(q_i - q_j) + \sum_{i=1}^N M \cos q_i. \quad (4.3.5)$$

4. Insistons sur le fait que la dynamique n'est en général pas intégrable, même à $N \rightarrow \infty$, cette limite n'assurant aucunement à elle seule l'absence de variations temporelles de $M(t)$.

Remarquons que nous retrouvons bien $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$. Ainsi, les équations du mouvement du système réel à N fini sont données par

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I) \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial J} (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I). \quad (4.3.6)$$

Posons le développement perturbatif

$$J = J^{(0)} + J^{(1)} + \dots \quad \text{et} \quad \theta = \theta^0 + \theta^{(1)} + \dots \quad (4.3.7)$$

À l'ordre zéro, nous retrouvons les équations du mouvement non perturbé, où seul \mathcal{H}_0 intervient, à savoir

$$J_i^{(0)}(t) = J_i^{(0)}(0) \quad \text{et} \quad \theta_i^{(0)}(t) = \theta_i^{(0)}(0) + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_i} \Big|_{J_i^{(0)}} t. \quad (4.3.8)$$

Au premier ordre, nous obtenons

$$\frac{dJ_i^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial \theta_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_i^{(1)}}{dt} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J^2} J_i^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial J_i}. \quad (4.3.9)$$

En posant $\Omega_i = \partial \mathcal{H}_0 / \partial J_i|_{J_i^{(0)}}$, et en injectant les orbites non perturbées (4.3.8) dans les équations sur les premiers ordres de J et θ , il vient, après intégration

$$J_i^{(1)} = -\frac{\partial \chi}{\partial \theta_i} \quad \text{et} \quad \theta_i^{(1)} = \frac{\partial \chi}{\partial J_i}, \quad (4.3.10)$$

où la fonction χ est définie par

$$\chi = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sum_{k,k'} \frac{\tilde{V}_{k,k'}}{i(k\Omega_i - k'\Omega_j)} e^{i(k\theta_i^{(0)} - k'\theta_j^{(0)})} + M \sum_{i=1}^N \sum_k \frac{\tilde{V}_{k,0}}{ik\Omega_i} e^{ik\theta_i^{(0)}}, \quad (4.3.11)$$

elle-même fonction des coefficients de Fourier des potentiels

$$\tilde{V}_{k,k'}(J, J') = -\frac{1}{8N\pi^2} \iint \cos[q(J, \theta) - q(J', \theta')] e^{-i(k\theta - k'\theta')} d\theta d\theta'. \quad (4.3.12)$$

Au second ordre, afin d'obtenir des expressions utilisables analytiquement, nous devons moyenner les expressions de $J_i^{(2)}$ sur les variables angulaires $\theta_i^{(0)}$, supposées de distribution uniforme pendant le QSS. L'élimination des sommes sur les particules peut se transformer avantageusement en une intégrale sur la distribution des actions à l'ordre zéro $J_i^{(0)}$, qui échantillonnaient initialement la distribution $f_0(J)$ du QSS. Ces moyennes excluent donc les particules dont la variation d'action J se produit sur un intervalle de temps plus faible que $1/\Omega(J)$. Pour le modèle HMF, il s'agit d'exclure les particules dont l'action est faible, ces dernières subissant des déviations de leurs orbites intégrables sur des échelles de temps bien plus faibles que celles des particules proches des bords, par la simple action des séparatrices. Nous reviendrons là-dessus lors de l'étude numérique de leurs propriétés de diffusion.

Après quelques calculs [57], nous obtenons, à l'ordre $1/N$, en notant $\langle \cdot \rangle$ la moyenne sur la distribution quasistationnaire $\{J^{(0)}, \theta^{(0)}\}$, les expressions des déplacements moyens

$\langle \Delta J \rangle = \langle J(t_2) - J(t_1) \rangle$ et quadratiques moyens $\langle (\Delta J)^2 \rangle$ pendant un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\left\langle \frac{\Delta J}{\Delta t} \right\rangle = 4N\pi^2 \int f_0(J') \sum_{k,k'} \left(k \frac{\partial}{\partial J} - k' \frac{\partial}{\partial J'} \right) \left\{ \left| \tilde{V}_{k,k'}(J, J') \right|^2 \times k \delta(k\Omega(J) - k'\Omega(J')) \right\} dJ'. \quad (4.3.13)$$

L'incrément quadratique s'écrit quant à lui, dans la limite⁵ $\Delta t \rightarrow \infty$

$$\left\langle \frac{(\Delta J)^2}{\Delta t} \right\rangle = 8N\pi^2 \int f_0(J') \sum_{k,k'} k^2 \left| \tilde{V}_{k,k'} \right|^2 \delta(k\Omega(J) - k'\Omega(J')) dJ dJ'. \quad (4.3.14)$$

En suivant l'esprit de ce qui a été fait au chapitre précédent, nous pourrions écrire l'équation de Fokker-Planck associée à la dynamique des particules d'action élevée, et en déduire des temps de diffusion. Malheureusement, cette tâche, bien que formellement facile, nous oppose une difficulté de taille : nous ne connaissons rien de la distribution QSS f_0 , et les coefficients $V_{k,k'}$ s'avèrent extrêmement lourds à calculer. Pressés par le temps et voulant obtenir une loi d'échelle en N de façon efficace, nous allons adopter une autre stratégie, sans pour autant abandonner la piste d'une modélisation effective par Fokker-Planck.

4.3.2 Principe général

Plutôt que de faire le développement perturbatif présenté au paragraphe précédent, nous allons modéliser directement la variation temporelle de l'action des particules à partir des données simulées. Nous exposons dans ce paragraphe la méthode générale de mesure numérique.

Supposons que nous ayons accès à une mesure temporelle $X(t)$, dont l'évolution peut être décrite par l'équation de Langevin suivante :

$$\frac{dX}{dt} = g(X(t)) + h(X(t))\xi(t), \quad (4.3.15)$$

où les fonctions g et h ne dépendent pas explicitement du temps, et où ξ est un bruit blanc gaussien. Si ξ est delta-corrélé, la dynamique de l'observable X est Markovienne ; en d'autres termes, l'évolution de $X(t)$ ne dépend pas de son évolution passée, mais seulement de sa position actuelle.

Pour chaque instant t , la position du système à $t + \tau$ est donnée par

$$X(t + \tau) = \int_t^{t+\tau} g(X(s)) ds + \int_t^{t+\tau} h(X(s)) \xi(s) ds. \quad (4.3.16)$$

Le premier terme, correspondant à l'évolution déterministe, est corrigé par une fluctuation d'origine stochastique. Dans la limite $\tau \rightarrow 0$, les trajectoires issues du point x

5. Gardons à l'esprit que cette limite s'effectue sur une échelle de temps mésoscopique.

à l'instant t sont donc distribuées selon une loi Normale centrée sur $g(x)$ et de variance $h^2(x)$. Ainsi

$$g(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle X(t + \tau) - x \rangle_{X(t)=x}, \quad (4.3.17)$$

$$h^2(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (X(t + \tau) - x)^2 \rangle_{X(t)=x}, \quad (4.3.18)$$

où les moyennes, notées par $\langle \cdot \rangle$ sont des moyennes d'ensemble. D'un point de vue numérique, les trajectoires $X(t)$ sont en fait des suites de points discrets, et la limite $\tau \rightarrow 0$ s'obtient donc en pratique par extrapolation.

4.3.3 Mesure numérique du coefficient de diffusion

Dans notre cas, nous disposons de l'évolution de l'action de chaque particule discrétisée en temps, par intervalles réguliers de durée Δt . Un exemple de trajectoire est donné en figure 4.2. Nous pouvons alors étudier la distribution de la probabilité de saut d'action entre les instants t et $t + \Delta t$, que nous trouvons être localement gaussienne. En effet, pour chaque particule, l'expression de la probabilité de saut pendant Δt entre

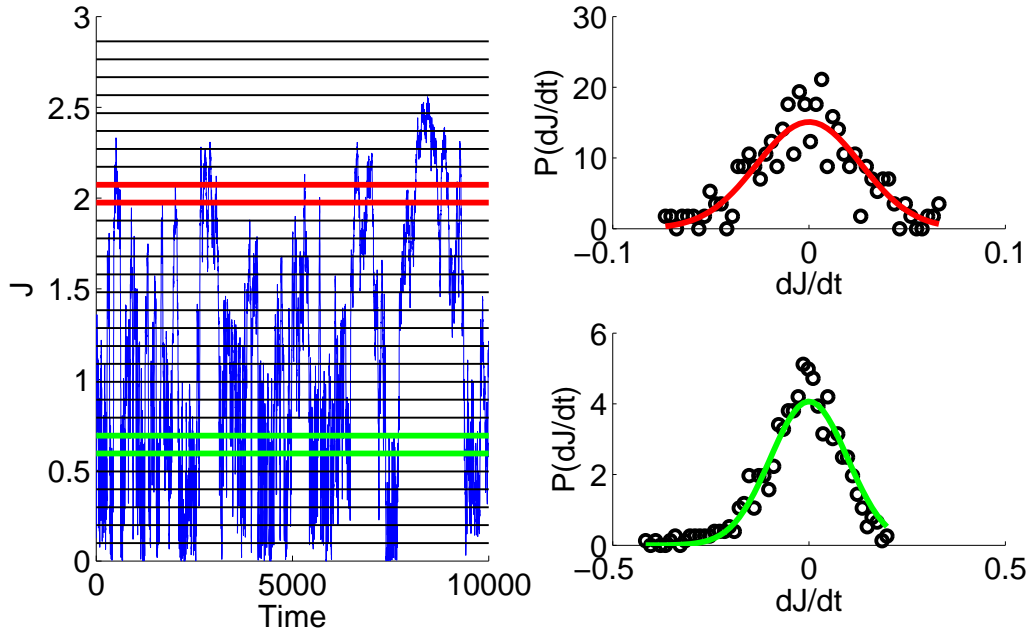


FIGURE 4.2 – À gauche, le tracé de l'évolution temporelle de l'action d'une particule pendant un QSS waterbag. Les traits horizontaux délimitent la discrétisation en action selon laquelle ont été calculées les probabilités de saut pour un incrément temporel choisi. À droite, les cercles noirs représentent les sauts d'action mesurés expérimentalement, alors que les courbes en trait plein montrent le caractère gaussien de ces sauts.

les actions $J(t)$ et $J(t + \Delta t)$ obéit à la loi

$$P(X = J(t + \Delta t) | J(t)) \propto \exp \left[\frac{(X - J(t))^2}{2\sigma^2(J(t))} \right]. \quad (4.3.19)$$

Il est alors raisonnable d'approximer l'évolution de l'action des particules par l'équation de Langevin suivante :

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dJ} + \sqrt{C(N)D(J)}\xi(t), \quad (4.3.20)$$

où $\xi(t)$ est un processus stochastique gaussien de variance unité. Le facteur de normalisation $\sqrt{C(N)D(J)}$ rend compte de deux choses :

La première, à travers le coefficient $C(N)$, à l'instar du QSS “proche de l'équilibre” étudié lors du paragraphe 3.3.4, décrit les fluctuations d'ordre $1/N$ dues à l'aimantation.

Le second coefficient, $D(J)$, modélise la dépendance en action de la diffusion. En effet, nous remarquons que les particules ayant une action assez élevée subissent peu l'effet des fluctuations temporelles de l'aimantation, et conservent une action proche de leur action initiale, contrairement aux particules moins énergétiques, qui voient leur action fluctuer de façon non négligeable au cours du temps. La prise en compte de cette **localité dans la diffusion** est l'ingrédient capital de la suite de l'étude. Ce dernier n'était pas présent dans la description du QSS proche de l'équilibre, pour lequel la loi d'échelle émergeait simplement de la dépendance en N des fluctuations de l'aimantation. Nous allons voir que dans le cas plus problématique du waterbag à $U = 0.69$, il est nécessaire de prendre en compte la localité des propriétés de diffusion des particules dans l'espace des phases afin d'expliquer la loi d'échelle en $N^{1.7}$. Le terme $V'_{\text{eff}}(J)$ décrit quant à lui le mouvement déterministe éventuel des trajectoires d'action. En pratique, il est négligeable, réduisant la modélisation à de la diffusion “libre”, bien qu'anisotrope en action.

La procédure de mesure numérique des paramètres V'_{eff} et $D(J)$ s'articule comme suit. Premièrement, il faut sélectionner un intervalle temporel durant lequel l'aimantation fluctue autour d'une valeur M_0 constante. Après avoir choisi une discrétisation en action, nous mesurons alors les probabilités de saut $P(X|J(t))$, représentant la probabilité pour une particule située à J à l'instant t , de passer à l'action X après un intervalle de temps Δt . Définissons alors les deux quantités suivantes :

$$\langle \delta J \rangle (J, \Delta t) = \int X P(X|J(t)) dX, \quad (4.3.21)$$

$$\langle \delta J^2 \rangle (J, \Delta t) = \int (X - \langle \delta J \rangle)^2 P(X|J(t)) dX, \quad (4.3.22)$$

qui représentent respectivement la dérive et la diffusivité des particules. Pour cette dernière, nous noterons plus schématiquement,

$$\langle \delta J^2 \rangle (J, \Delta t) = \langle (J(t + \Delta t) - J(t))^2 \rangle \big|_{J(t)=J}, \quad (4.3.23)$$

où la moyenne est bien une moyenne d'ensemble en vertu de la définition (4.3.22). L'évolution temporelle de $\langle \delta J^2 \rangle$ avec Δt n'est pas triviale. Nous avons vu apparaître

trois régimes temporels différents : pour les valeurs de Δt faibles, $\langle \delta J^2 \rangle$ rend compte des variations rapides du champ moyen, qui n'est pas assimilable à un processus aléatoire à cette échelle temporelle. Lorsque Δt est au contraire suffisamment grand, typiquement de l'ordre de $M^{-1/2}$, l'incrément quadratique sature et ne présente plus de variation avec Δt . Entre ces deux régimes, lorsque $\langle \delta J^2 \rangle$ croît linéairement avec Δt , la dynamique est alors diffusive, et nous définirons le coefficient de diffusion $D(J)$ comme le coefficient directeur de la droite $\langle \delta J^2 \rangle(\Delta t)$.

4.3.4 Le cas problématique “1.7”

Nous allons à présent faire le lien entre le coefficient de diffusion $D(J)$ et la loi d'échelle du temps de vie du QSS en question.

Rappelons qu'à partir de la distribution initiale (4.1.1) d'énergie $U = 0.69$, l'aimantation se stabilise assez rapidement autour d'une valeur faible M_0 , et les particules se distinguent alors en deux groupes. Les particules d'action importante, qui ont trop d'inertie pour être influencées par les fluctuations de l'aimantation, et les particules centrales, qui subissent piégeages et dépiégeages intempestifs car M_0 est du même ordre que les fluctuations de champ moyen δM .

Afin que la distribution de particules dans l'espace des phases projeté atteigne la prédiction (1.3.23), il est nécessaire de peupler l'intérieur des séparatrices en particules, et nous postulons que le temps de vie du QSS suit la même loi d'échelle que le temps mis par les particules d'action élevée pour visiter l'espace des phases.

Au Chapitre 3, le temps de vie des QSS était dominé par le temps mis par le système pour dépeupler les structures cohérentes présentes à l'intérieur des séparatrices. Dans le cas présenté ici, il s'agit d'estimer le temps associé au phénomène inverse, à savoir le temps mis pour peupler l'intérieur des séparatrices par la diffusion de particules d'énergie élevée.

Afin d'estimer ce temps, nous pouvons commencer par écrire l'équation de Fokker-Planck associée à la dynamique de Langevin (4.3.20),

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{C(N)}{2} \frac{\partial}{\partial J} \left[D(J) \frac{\partial P}{\partial J} \right] \quad (4.3.24)$$

où la convention pour le bruit multiplicatif est celle de Strato ($\alpha = 1$ dans l'équation (3.3.17)). Nous avons fait ce choix afin d'avoir une équation compatible avec l'équation quasilineaire (3.3.34) vue précédemment [36, 73]. Procédons aux changements d'échelles suivants :

$$\hat{t} = J^* t, \quad (4.3.25)$$

$$\hat{J} = J/J^*, \quad (4.3.26)$$

$$\hat{P} = J^* P, \quad (4.3.27)$$

où J^* est défini par (1.3.29). L'équation de Fokker-Planck (4.3.24) devient

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{t}} = \frac{C(N)}{2J^{*3}} \frac{\partial}{\partial \hat{J}} \left[D(J^* \hat{J}) \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{J}} \right]. \quad (4.3.28)$$

En appliquant la procédure numérique décrite au paragraphe (4.3.3), nous avons obtenu les coefficients de diffusion pour des nombres de particules allant de 2000 à 20000. Les résultats illustrés en figure 4.3 montrent des coefficients de diffusion à l'allure non monotone, exhibant deux “bosses” localisées de part et d'autre de la séparatrice. Le

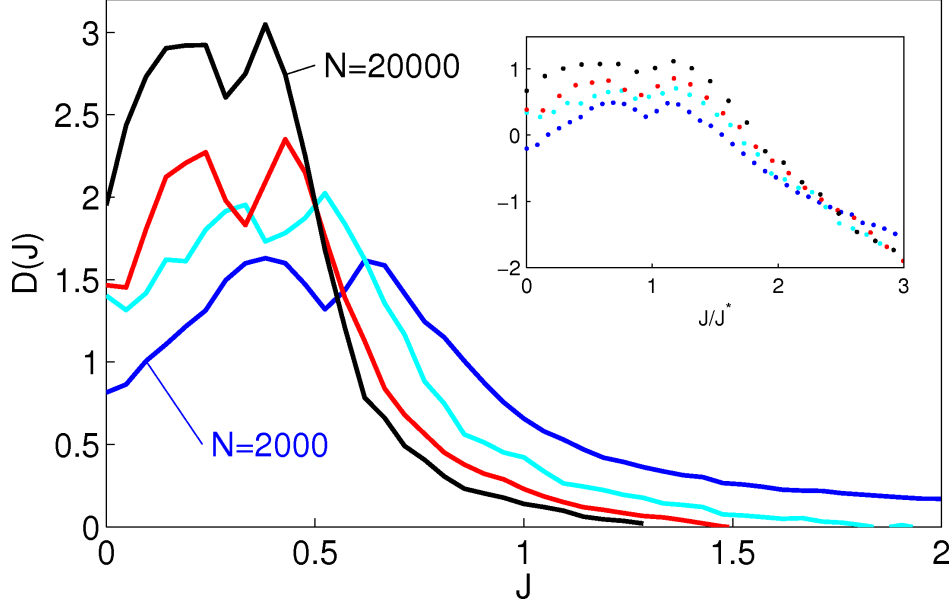


FIGURE 4.3 – Tracé du coefficient de diffusion mesuré selon la procédure présentée au paragraphe 4.3.3, dans le cas waterbag $U = 0.69$ pour différents nombres de particules. Il est remarquable de voir que le coefficient de diffusion n'évolue pas de façon monotone avec le nombre de particules. Alors qu'il augmente avec N dans une zone d'action proche de la séparatrice, il diminue en revanche loin de cette dernière. L'inset montre le point de croisement des différentes courbes en échelle J/J^* .

second constat issu de la figure 4.3 est que le coefficient de diffusion D dépend encore du nombre de particules, alors que nous avons sciemment isolé la contribution de ce dernier dans le facteur $C(N)$ dès la modélisation Langevin (4.3.20). En réalité, la dépendance en N de $D(J)$ est implicitement donnée par la variation de J^* avec le nombre de particules. En effet, nous avons, pour N dans l'intervalle $10^3 - 2 \cdot 10^4$,

$$J^* = \frac{8\sqrt{M_0}}{\pi} \propto N^{-1/4}, \quad (4.3.29)$$

ce qui explique la translation globale des courbes vers les valeurs faibles d'action lorsque le nombre de particules augmente. Enfin, de façon plus subtile, notons que le coefficient de diffusion n'évolue pas de façon monotone avec le nombre de particules. En effet, pour des valeurs d'action proches de la séparatrice, ce dernier augmente, alors qu'il diminue avec N lorsque l'on se place loin de la séparatrice. Afin de quantifier cet effet, supposons que la dépendance en J du coefficient de diffusion peut, grâce à l'introduction d'une

fonction inconnue β , se mettre sous la forme

$$D(J) \propto J^{*\beta(J)}, \quad (4.3.30)$$

ce qui fait apparaître explicitement J^* . La figure 4.4 montre la mesure numérique de la fonction β . Cette dernière croît de façon monotone avec la variable d'action. Ainsi, pour les valeurs de J assez faibles, $D(J) \propto J^{*-2}$, c'est-à-dire que $D(J) \propto N^{1/2}$ dans cette zone d'action là. Ce comportement est bien entendu visible sur le tracé direct de D en figure 4.3, la valeur maximale de ce dernier se trouvant proche de la séparatrice, et augmentant avec N . Les particules se trouvant à une action faible subissent doublement les fluctuations temporelles de l'aimantation. En effet, ces fluctuations étant du même ordre que la valeur moyenne M_0 , les particules au voisinage de la séparatrice subissent non seulement de la diffusion, mais des piégeages-dépiégeages intempestifs, ce qui augmente fatalement la valeur du coefficient de diffusion localement observé. En

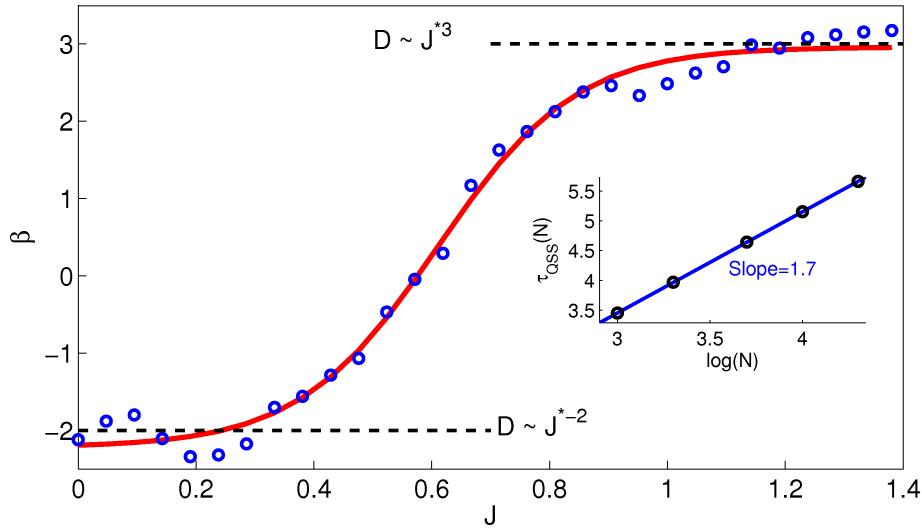


FIGURE 4.4 – Pour chaque valeur d'action J , la dépendance de $D(J)$ en J^* est correctement approximée par la loi d'échelle (4.3.30). La fonction β est ici tracée numériquement (cercles noirs), chaque point résultant d'un fit sur $N = 2.10^3$, 5.10^3 , 10^4 et 2.10^4 particules. La courbe en trait plein rouge correspond au meilleur fit en tangente hyperbolique trouvé. L'inset quant à lui montre l'évolution d'un temps de vie (identifié au temps moyen de premier passage à un coefficient multiplicatif près) calculé en utilisant le fit dans la formule (4.3.37).

ce qui concerne les valeurs d'action plus élevées, $\beta \rightarrow 3$, et le coefficient de diffusion vérifie $D(J) \propto N^{-3/4}$ dans cette région d'action : les particules loin de la séparatrice J^* subissent de façon très faible les fluctuations de l'aimantation. Il est en réalité possible de “prédire” ce comportement.

Reprenons l'équation du mouvement d'une particule, où nous explicitons les fluc-

tuations de l'aimantation autour de sa valeur moyenne M_0

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + (M_0 + \delta M(t)) \sin(q_i - \phi(t)) = 0. \quad (4.3.31)$$

Effectuons ensuite la transformation d'échelle $t \rightarrow \hat{t} = \sqrt{M_0}t$, $1/\sqrt{M_0}$ étant la seule échelle de temps du problème. En introduisant l'impulsion transformée $\hat{p} = p/\sqrt{M_0}$, l'équation du mouvement dans cette nouvelle échelle de temps s'écrit

$$\frac{d\hat{p}_i}{d\hat{t}} + \left(1 + \frac{\delta M(t)}{M_0}\right) \sin(q_i - \phi) = 0. \quad (4.3.32)$$

Les frontières des séparatrices moyennes dans ces nouvelles unités sont données par

$$\hat{p}^* = \pm 2 \cos \frac{q}{2}. \quad (4.3.33)$$

Sous cette transformation, l'espace des phases peut à nouveau être vu comme constitué d'une résonance macroscopique (son extension en \hat{p} vaut 4), soumise à des fluctuations dont l'amplitude est donnée par $\delta M/M = O(1)$. Pour une particule loin de la séparatrice, vu la nouvelle équation du mouvement (4.3.32), l'effet des fluctuations d'aimantation n'a plus aucune raison de dépendre de la valeur de cette dernière, la seule dépendance en N restante se trouvant dans la fréquence caractéristique du forçage induit par la quantité $\delta M/M$. Ainsi, toujours pour des valeurs élevées d'action, le coefficient de diffusion $D(J)$ doit simplifier la dépendance explicite en J^{*3} présente dans l'équation de Fokker-Planck transformée (4.3.28), ce qui est bien corroboré par la mesure numérique de β .

Face à la dépendance implicite en N du coefficient de diffusion, nous voyons ici que la localité de ce dernier doit absolument être prise en compte afin de décrire les lois d'échelle en N régissant le modèle HMF durant ce type de QSS.

4.3.5 Temps de premier passage

Nous nous étions fixé comme objectif d'estimer le temps mis par des particules proches des bords de la distribution de vitesse pendant le QSS pour atteindre le centre de l'espace des phases. Comme démontré en Annexe C, si l'on note \mathcal{L}_{FP} l'opérateur de Fokker-Planck, le temps moyen de premier passage $\langle \tau \rangle$ est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{FP}}^\dagger \langle \tau \rangle = -1, \quad (4.3.34)$$

où le symbole \dagger représente l'opérateur adjoint. Il est facile de montrer que dans le cas de l'équation (4.3.24), ce dernier est auto-adjoint :

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \frac{C(N)}{2} \frac{\partial}{\partial J} D(J) \frac{\partial}{\partial J} = \mathcal{L}_{\text{FP}}^\dagger. \quad (4.3.35)$$

L'équation (4.3.34) fournit donc finalement le temps moyen de premier passage pour une particule partant d'une action J_0 d'ordre 1 pour atteindre $J^* < J_0$. En supposant ce temps extrême pour le trajet $J \rightarrow J^* = 0$ (c'est-à-dire $\partial_J \langle \tau \rangle (J^* = 0) = 0$), il vient

$$\langle \tau \rangle = \int_{J^*}^{J_0} \frac{2J}{C(N)D(J)} dJ. \quad (4.3.36)$$

En utilisant la représentation (4.3.30) du coefficient de diffusion ainsi que la loi d'échelle pour les fluctuations donnée par (4.3.29), ce temps s'estime comme

$$\langle \tau \rangle \sim \int_{J^*}^{J_0} J \exp \left[\left(1 + \frac{\beta(J)}{4} \right) \log N \right] dJ. \quad (4.3.37)$$

En supposant que β soit *strictement* monotone, la méthode du col fournit finalement la loi d'échelle escomptée,

$$\langle \tau \rangle \propto N^{1+\beta(J_0)/4}. \quad (4.3.38)$$

Dans la limite où J_0 est grand, ce temps de premier passage estime donc le temps mis par les particules situées aux bords de la distribution de vitesse pour atteindre une action plus faible, de l'ordre de celle de la séparatrice. Notons qu'il est totalement dominé par la valeur du coefficient de diffusion dans sa zone la plus faible. On retrouve donc, lorsque $\beta(J_0) \simeq 2.8$, la fameuse loi d'échelle

$$\tau_{\text{QSS}} \propto N^{1.7}. \quad (4.3.39)$$

4.3.6 Comparaison avec la simulation numérique

Nous avons vérifié numériquement la formule (4.3.36) en positionnant des particules test sur un tore d'action donné, pour différentes valeurs de N . La distribution du temps de premier passage se révèle être invariante par rescaling de la variable temporelle $\tau \rightarrow \tau/N^{1.75}$, ce qui confirme (4.3.38). Comme en atteste la figure 4.5, la moyenne de cette distribution concorde parfaitement avec l'estimation provenant de l'équation (4.3.36), où nous avons utilisé les valeurs relevées numériquement pour $D(J)$ et $C(N)$. La figure 4.6 montre l'évolution d'un cluster de particules initialement situées

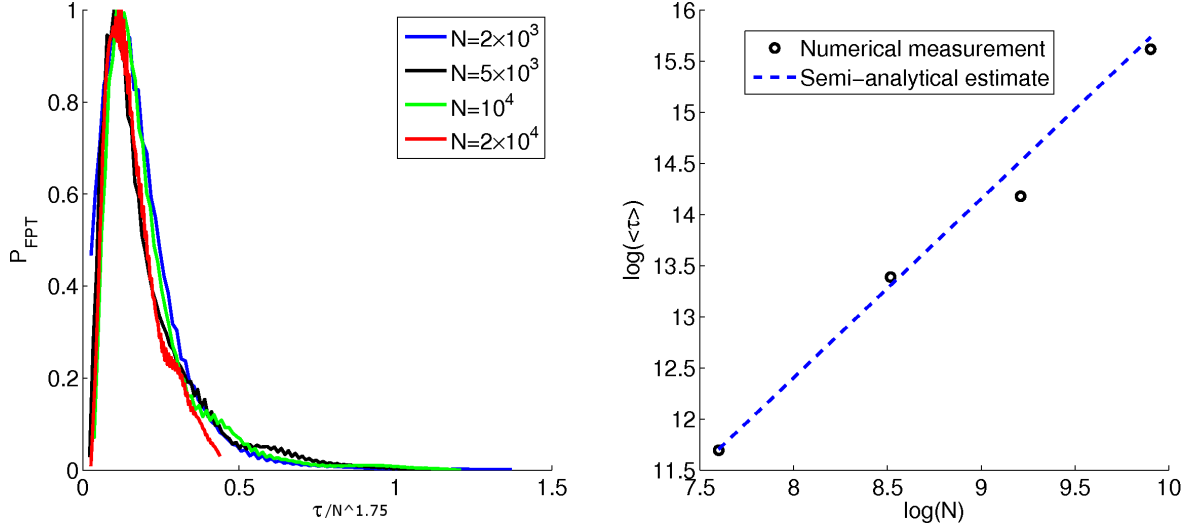


FIGURE 4.5 – À gauche, nous avons reporté le tracé de la distribution du temps moyen de premier passage pour un groupe de particules test placées à $p = 1.35$ pour différentes réalisations de l'aimantation. Les courbes se superposent bien lorsque l'on rescale le temps par $N^{1.75}$. À droite, nous comparons la prédiction semi-analytique fournie par (4.3.36) en trait discontinu avec les mesures numériques (cercles noirs).

en $p = 1.35$. L'aimantation augmente progressivement avec la visite des particules de l'espace des phases, confirmant notre idée d'indicateur de thermalisation.

4.3.7 Note sur l'établissement du QSS

Notons toutefois que le choix de $p = 1.35$ peut paraître étonnant. En effet, pour une énergie $U = 0.69$, l'équation (3.1.2) donne $\Delta p \simeq 1.07$, ce qui impliquerait que le cluster de particules test choisi ne décrive pas les particules du bord du waterbag, ces dernières se trouvant plus proches de $p = 0$ que ce que nous avons pris. En réalité, bien que le waterbag soit linéairement stable (voir paragraphe 1.4.2), il s'avère que la distribution s'élargit au bout d'un certain laps de temps, très faible devant le temps de vie du QSS. Notons que Campa *et al.* en référence [50] ont qualifié la nouvelle distribution obtenue

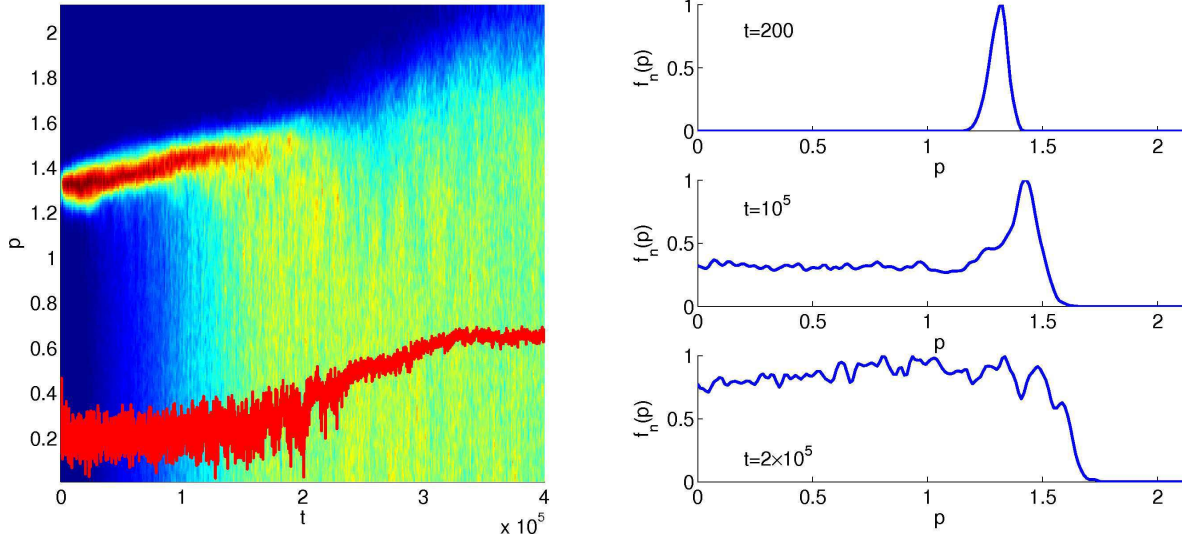


FIGURE 4.6 – À gauche, le tracé de l'évolution d'un ensemble de particules test initialement placées à $p = 1.35$ et évoluant sous la dynamique de l'aimantation pour $N = 5000$ particules. Les couleurs représentent la densité de particules, et la courbe rouge en trait plein la position moyenne de la séparatrice $4\sqrt{M(t)}/\pi$. À droite, les distributions en vitesse à différents instants, montrant clairement la diffusion du pic initial vers le centre.

de “semi-elliptique”, approximativement décrite par

$$f_{\text{el}}(q, p) = \frac{1}{\pi^2 p_{\text{el}}} \sqrt{1 - \frac{p^2}{p_{\text{el}}^2}} \Theta(p_{\text{el}} - |p|), \quad (4.3.40)$$

où $p_{\text{el}} = \sqrt{8U - 4}$. Pour $U = 0.69$, nous trouvons $p \simeq 1.23$, ce qui est déjà supérieur à la limite $p \simeq 1.07$ du waterbag initial.

Bien que le temps mis par le système pour accéder à un tel état soit faible, il se pourrait qu'il suive aussi une loi d'échelle particulière en N . En notant $\eta(t)$ la fraction de particules à l'extérieur du waterbag initial à l'instant t , il est possible d'observer deux régimes. La figure 4.7 rend compte de ce phénomène, et met aussi en évidence la variation brutale d'aimantation durant les premiers instants d'évolution grâce à la moyenne continue

$$\bar{M}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t M(s) ds. \quad (4.3.41)$$

La figure 4.8 montre l'espace des phases pour le waterbag $U = 0.69$ peu après la phase de stabilité linéaire⁶ de la distribution initiale. La fraction de particules se trouvant à l'extérieur du waterbag initial est de l'ordre de 15%. De plus, les premiers résultats sur l'établissement du QSS semblent indiquer qu'il suit la même dynamique temporelle que sa destruction. En effet, si l'on trace le temps à partir duquel η dépasse 10% en fonction du nombre de particules, nous obtenons là encore une loi de puissance en $N^{1.75}$.

6. Stabilité linéaire au sens de Vlasov.

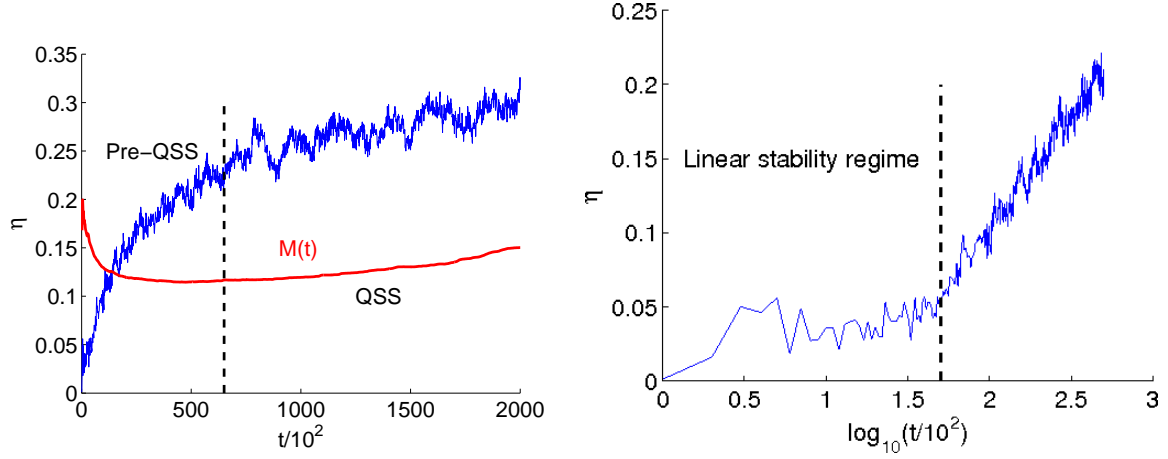


FIGURE 4.7 – À gauche, nous avons tracé la fraction de particules η se trouvant à l'extérieur des frontières initiales du waterbag, ainsi que la moyenne continue \bar{M} (4.3.41) de l'aimantation en trait continu rouge, pour une réalisation à $N = 5000$ particules. À droite, un zoom en échelle log sur l'intervalle de temps durant lequel le waterbag initial est linéairement stable. À l'issue de cette phase, et de façon assez brutale, η augmente, et traduit l'élargissement en impulsion de la distribution, jusqu'à atteindre environ 20% de particules à l'extérieur de frontières du waterbag initial.

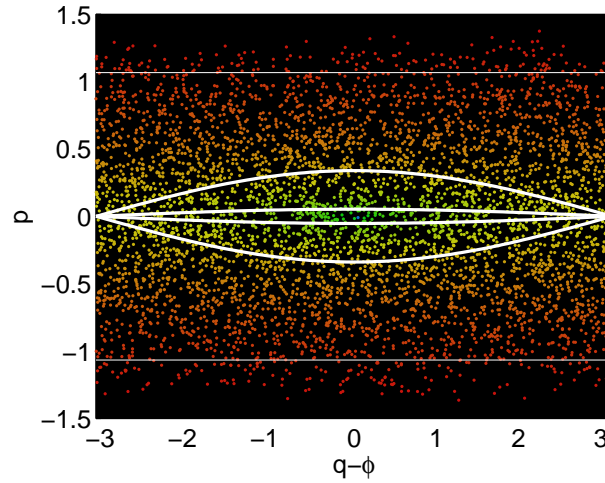


FIGURE 4.8 – Instantané de l'espace des phases à une particule issu du waterbag $U = 0.69$ pour $N = 5000$. Les traits horizontaux blancs délimitent le waterbag initial, d'extension $2\Delta p$, où $\Delta p = 1.07$ en vertu de l'équation (3.1.2). Les courbes en trait plein représentent les positions extrêmes de la séparatrice sur un intervalle de temps de l'ordre du temps de vie du QSS.

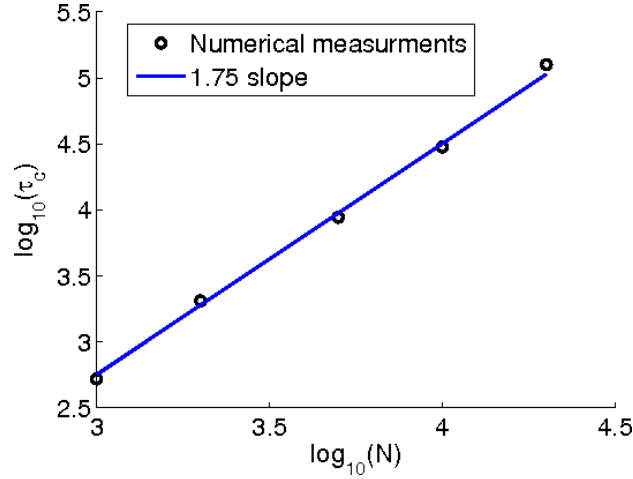


FIGURE 4.9 – Tracé du temps critique τ_c tel que $\eta > 10\%$ en fonction du nombre de particules. Bien que ce temps soit faible, il exhibe bel et bien une loi d'échelle en $N^{1.75}$.

4.4 Discussion générale

Nous venons au cours de ces deux derniers chapitres d'étudier deux cas d'états quasistationnaires, chacun exhibant une dynamique de relaxation vers l'équilibre lui étant propre, mais compréhensible en termes d'exploration de l'espace des phases par les particules.

Dans le premier cas, faisant l'objet du Chapitre 3, l'état QSS était proche de l'équilibre, et son temps de vie caractérisé par le temps mis par les particules initialement piégées dans la séparatrice pour en sortir.

Le cas plus intrigant du QSS initié par une distribution waterbag Vlasov-stable a lui aussi été compris en utilisant le même concept. Au lieu d'étudier les particules qui s'échappent de la séparatrice, il fallait plutôt se focaliser sur le temps mis par les particules des ailes de la distribution pour atteindre le centre de l'espace des phases à une particule et donc visiter efficacement ce dernier.

Pour des énergies U supérieures à l'énergie critique, on note l'existence d'états quasistationnaires dont la durée de vie augmente exponentiellement vite avec le nombre de particules [50]. Nous venons de voir, grâce au cas “1.7”, que lorsque la séparatrice est microscopique, l'échelle temporelle de la dynamique est totalement contrôlée par les particules de grande énergie. Lorsque la distribution des vitesses est trop large, il devient alors possible qu'elle empiète sur l'équivalent de ce qui serait un tore de KAM, réminiscent de la dynamique intégrable à énergie $U > 3/4$ et faisant barrière à toute particule souhaitant rejoindre le centre, expliquant ainsi les temps de thermalisation exceptionnellement élevés mesurés pour ces configurations.

Quel lien peut-on alors faire avec la théorie quasilinéaire [73] ? Que ce soit dans le cadre de cette théorie ou de celle exposée dans ce chapitre, les ingrédients de la relaxation vers l'équilibre se trouvent concentrés dans l'évaluation précise du coefficient de diffusion. Nous souhaitons par la suite calculer de façon approximative, mais analytique, le comportement asymptotique de ce coefficient, et comprendre les résultats des

dernières simulations numériques sur le sujet [80, 81].

Deuxième partie

Transport dans un effondrement de dents de scie

Introduction

La quête de nouvelles sources d'énergie a toujours accompagné le développement technologique de l'humanité. La consommation énergétique moyenne par habitant ne cesse d'augmenter, excédant déjà depuis 50 ans le seuil journalier de 2400 kcal, soit 3 GJ/an. L'unité utilisée aujourd'hui pour évaluer la consommation énergétique est la tep, pour **tonne équivalent pétrole**, 1 tep correspondant à 42 GJ. Après avoir atteint un pic en 2002 de 4.47 tep par habitant, la consommation énergétique française a légèrement diminué cette dernière décennie pour se retrouver au niveau de celle des années 1990, à tout de même environ 3.8 tep/an/hab. À titre de comparaison, la consommation énergétique d'un pays émergent comme le Maroc s'élève à 0.5 tep/an/hab., tandis que celle des États-Unis culminait à 7 tep/an/hab. en 2011.

À ce jour, la totalité des réserves énergétiques fossiles connues n'excède guère 1000 Gtep, ce qui, dans un scénario de croissance relativement pessimiste, sonne l'épuisement de ces dernières d'ici un siècle seulement. En ce qui concerne l'énergie nucléaire, produite par les réactions de fission de l'Uranium enrichi, les ressources de cet élément sont données pour durer encore environ 100 ans dans le cadre d'une utilisation par les technologies actuelles. Nous devons à ce titre la découverte de la fission en 1938 à Otto Hahn et Lise Meitner, et la conception du premier réacteur nucléaire à Fermi en 1942, dans le cadre du projet Manhattan, ce qui permit à terme la réalisation des deux tristement célèbres premières bombes atomiques de l'histoire, larguées trois années après sur les villes d'Hiroshima et de Nagasaki. De nos jours, la recherche en fission nucléaire est toujours extrêmement active et pourrait donner lieu à l'avènement de nouveaux réacteurs tirant bénéfice de ce qui est actuellement considéré comme déchets nucléaires, prolongeant ainsi significativement l'espérance de vie de cette technologie, virtuellement jusqu'à plusieurs siècles. Malgré les perspectives d'avenir prometteuses pour la filière fission, le contexte sociétal s'est particulièrement assombri suite à l'accident de Fukushima en Mars 2011, classé par Tokyo sur l'échelle internationale INES des événements nucléaires au même niveau que la catastrophe de Tchernobyl. La quête d'une alternative présentant les mêmes avantages énergétiques que la fission nucléaire est donc plus que jamais au centre des préoccupations gouvernementales.

Dès 1920, avant donc le début de la fission nucléaire, en étudiant le défaut de masse de l'Hélium, Francis William Aston découvre qu'il est possible de récupérer de l'énergie en fabriquant un noyau d'Hélium à partir d'éléments plus légers. Nous devons cependant

à Arthur Eddington l'idée d'utiliser ce procédé afin d'en extraire de l'énergie en vue de l'utiliser à nos propres fins. Alors que les premiers réacteurs de fission nucléaire ont très vite été réalisés, il faudra attendre la fin de la Seconde Guerre Mondiale pour voir émerger le premier brevet de dispositif de confinement magnétique (Thomson et Blackman, 1946). Une configuration similaire, qui se révélera être celle encore utilisée aujourd'hui, a été proposée dès 1950 par le physicien russe Andrei Shkarov, sous le nom de *toroidalnaya kamera magnitnymi katushkam*, pour chambre toroïdale de champ magnétique. On se réfère aujourd'hui à cette structure par le nom "tokamak", obtenu en ne gardant que les deux premières lettres de chaque mot dans l'expression précédente.

Les années 50 sont toutefois marquées par le secret et l'absence de collaboration scientifique internationale sur fond de guerre froide, jusqu'en 1958, où les différents pays protagonistes dévoilent enfin les dispositifs visant à atteindre l'ignition, c'est-à-dire le seuil énergétique permettant l'auto-entretien des processus de fusion grâce à leurs propres produits de réaction. Parmi ces projets on trouve tokamaks, stellarators et autres machines à z-pinches. Aucun de ces dispositifs ne s'avère cependant plus performant qu'un autre, jusqu'à ce qu'en 1968, les russes de l'institut Kurchatov annoncent avoir atteint une température record dans leur dispositif. Il s'agissait alors du tokamak T3. C'est depuis ce jour que les tokamaks sont considérés comme la technologie la plus prometteuse qui permettrait d'accéder à la fusion par confinement magnétique. Les années 70 voient la construction de projets de tokamaks européens tels que JET ou TFR. La France accueille en 1988 le premier tokamak à bobines supraconductrices, baptisé Tore Supra. Ce dernier détient d'ailleurs le record de durée de décharge, à plus de 6 minutes, contre quelques secondes tout au plus pour JET. Le projet ITER, toujours en cours de construction et lui aussi hébergé par la France, vise à démontrer la faisabilité à l'échelle industrielle de la fusion par confinement magnétique d'ici à 2020. En cas de succès, le projet DEMO lui succédera à l'horizon 2050. Il s'agira là d'un réacteur ressemblant en principe à la première version industrielle d'un réacteur à fusion.

Dans les étoiles, la force gravitationnelle suffit à confiner les noyaux et leur communiquer des vitesses suffisantes pour vaincre la répulsion électrostatique, permettant ainsi la fusion de deux éléments lors d'un choc. Sur Terre, le confinement gravitationnel est impossible, et il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes si l'on souhaite atteindre des densités volumiques propices aux réactions nucléaires. Au milieu du XX^e siècle, les physiciens nourrissaient l'espoir de maîtriser ces méthodes à l'aube des années 2000. La multiplication des projets expérimentaux, de plus en plus aboutis et prometteurs, n'ont toutefois jamais cessé de mettre à jour les innombrables défis technologiques parsemant le chemin vers la fusion. Concrètement, sa réalisation en tokamak nécessite le maintien d'une température et d'une densité conséquentes pendant une durée suffisamment longue afin que la réaction nucléaire puisse non seulement s'opérer, mais aussi s'auto-entretenir. Outre la maîtrise d'un tel confinement, la physico-chimie de l'interaction entre le plasma et les bords de l'enceinte du tokamak est à l'origine d'une multitude de difficultés supplémentaires. Parmi elles, la possibilité pour des éléments lourds constituant le bord de l'enceinte de s'ablater puis diffuser vers l'intérieur du tokamak, absorbant ainsi l'énergie du plasma déjà péniblement confiné.

C'est dans le contexte du contrôle de la diffusion de telles particules que la seconde partie de cette thèse s'inscrit. Le premier chapitre introduit la configuration tokamak

ainsi que le formalisme hamiltonien des lignes de champ magnétique, et s'attarde à décrire la topologie de celui-ci, notamment dans le cas "stochastique", correspondant à un cas pratique de chaos hamiltonien parfaitement déterministe.

Le second chapitre vise à résoudre un problème expérimental bien particulier qu'est le transport d'ions Nickel dans le tokamak JET [82]. Après avoir introduit le contexte de l'instabilité "dents de scie", nous établissons la stratégie d'étude en magnétohydrodynamique idéale, puis résolvons numériquement le comportement de particules test dans des conditions modélisant l'expérience. Nous mettons alors en évidence l'importance de la stochasticité des lignes de champ pour le transport du Nickel.

Principe d'un tokamak et description hamiltonienne des lignes de champ magnétique

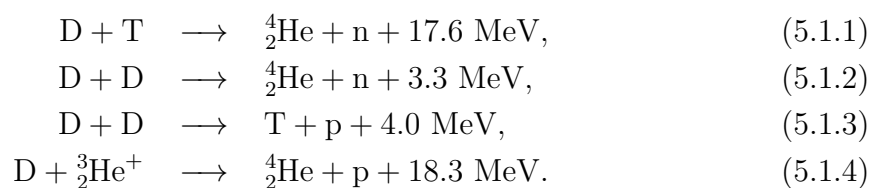
Sommaire

5.1	La fusion par confinement magnétique	97
5.1.1	Réactions nucléaires et critère d'ignition	97
5.1.2	La configuration magnétique "tokamak"	99
5.2	Formalisme hamiltonien	101
5.2.1	Coordonnées de flux	101
5.2.2	Perturbations magnétiques	103
5.3	Equilibre magnétohydrodynamique	105
5.3.1	Équation de Grad-Shafranov	105
5.3.2	Solution perturbative	106

5.1 La fusion par confinement magnétique

5.1.1 Réactions nucléaires et critère d'ignition

La réaction de fusion nucléaire est d'autant plus facile à réaliser que les éléments à fusionner sont légers et instables. La courbe d'Aston, donnée en figure 5.1, montre l'énergie moyenne de liaison par nucléon en fonction du numéro atomique des atomes. L'hydrogène et ses isotopes apparaissent comme le choix naturel pour la réalisation de la fusion. Parmi les différentes réactions possibles, on recense en particulier



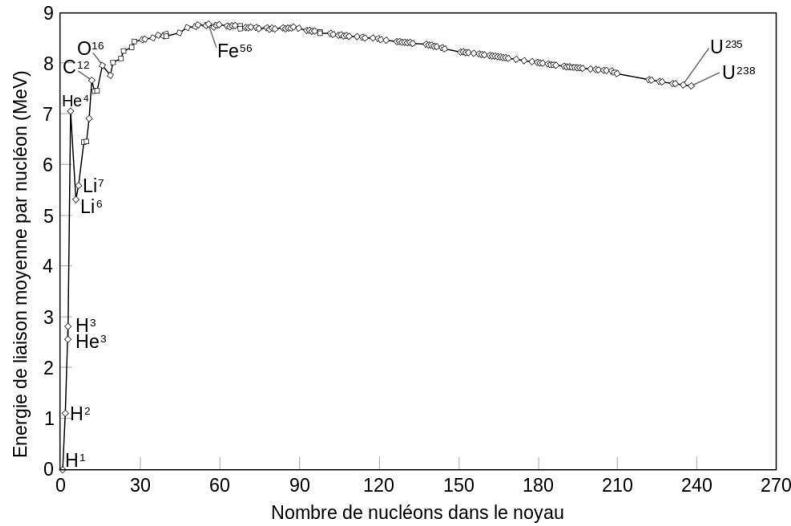


FIGURE 5.1 – Courbe d'Aston, donnant l'énergie de liaison par nucléon en fonction du numéro atomique. Le fer apparaît comme l'élément le plus stable, ce qui explique pourquoi les réactions de fusion dans les étoiles ne vont pas au-delà de cet élément. Sans surprise, l'hydrogène et ses isotopes apparaissent comme les éléments les plus propices à la réaction de fusion. *Graphie tiré de wikipedia commons*

Le choix du deutérium D n'est pas anodin. Cet isotope de l'hydrogène, stable, se retrouve dans l'eau des océans à raison d'un atome pour 6420 atomes d'hydrogène, et son processus d'extraction est déjà largement utilisé à l'échelle industrielle [83] pour l'absorption des neutrons issus des réactions de fission nucléaire, ce qui en fait une ressource virtuellement infinie au regard de la consommation estimée des futurs réacteurs.

Les réactions (5.1.1)-(5.1.4) se distinguent par leurs sections efficaces, données en figure 5.2. La réaction la plus accessible en termes énergétiques est la réaction deutérium-tritium (5.1.1), qui se trouve aussi présenter la section efficace la plus importante. C'est elle qui a été retenue pour application industrielle, et a par ailleurs déjà été testée avec succès en 1997 dans le tokamak JET [84], ce dernier ayant produit une puissance pic de 16 MW, soit environ 60% de celle fournie en entrée. La réaction de fusion (5.1.1) présente toutefois l'inconvénient de faire intervenir le tritium, qui, en plus d'être extrêmement toxique, n'existe pas à l'état naturel. Il est cependant possible d'utiliser les neutrons produits par cette réaction sur du lithium afin de produire le tritium *in-situ* grâce au processus



En dehors du tritium (dont la demi-vie est seulement de 12 ans), la réaction (5.1.1) ne produit pas de déchet radioactif, ni de dioxyde de carbone, et ne présente pas non plus de risque d'emballement.

Pour fusionner, les noyaux doivent entrer en collision avec des vitesses relatives suffisamment élevées afin de vaincre la répulsion électrostatique. Avec une température de 10^7 K et une densité de particules maintenue suffisamment élevée grâce à une force gravitationnelle conséquente, le centre du Soleil est le siège de réactions de fusion

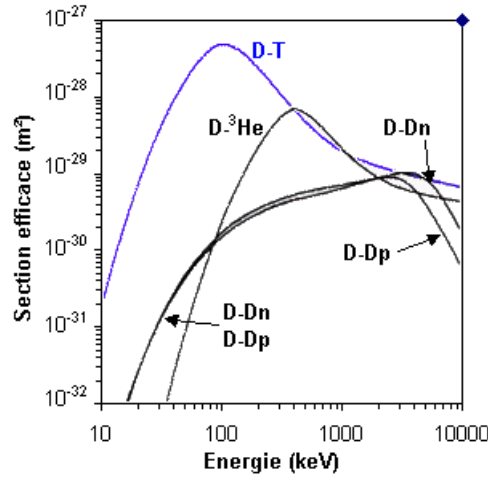


FIGURE 5.2 – Section efficace des différentes réactions de fusion. Les symboles Dx représentent un noyau d’Hydrogène, supplémenté de l’élément x, pouvant être un proton ou un neutron. *Graphie tiré de www.cea.fr*

d’atomes d’hydrogène. Or, comme nous l’avons évoqué en introduction, sur Terre, à la même température, nous ne disposons pas de la possibilité de déclencher la fusion de noyaux d’hydrogène par simple confinement gravitationnel. Nous avons par contre deux autres leviers, que sont la densité et le temps de confinement ¹. L’ignition, c’est-à-dire le seuil à partir duquel la réaction de fusion peut s’auto-entretenir malgré les pertes énergétiques, peut se caractériser par le critère de Lawson [85], défini par le produit $nT\tau$, où n est la densité de plasma, T la température, et τ le temps caractéristique de confinement. L’ordre de grandeur du seuil d’ignition est donné par

$$nT\tau > 6 \times 10^{21} \text{ keV.s.m}^{-3}, \quad (5.1.6)$$

ce qui revient à confiner une densité de 10^{20} particules par mètre cube, pendant près d’une seconde, à 100 millions de degrés... Le défi technologique est de taille.

5.1.2 La configuration magnétique “tokamak”

Après un régime de chauffage transitoire, le mélange deutérium-tritium s’ionise, et il devient alors possible de contrôler le plasma obtenu par l’application de champs magnétiques externes.

L’idée la plus simple consiste à piéger les particules chargées dans un solénoïde torique, dans lequel règne donc un champ magnétique toroïdal. Le mouvement des ions et des électrons est alors guidé par les lignes de champ magnétique, les particules adoptant en plus un mouvement de précession autour de ces dernières, caractérisé par un rayon de Larmor millimétrique. Malheureusement, la dépendance radiale du champ

1. Ce dernier est défini comme le temps caractéristique de refroidissement du plasma après coupure des apports d’énergie extérieurs.

magnétique toroïdal², conduit à des effets de dérive verticale. En effet, les espèces chargées, pendant une précession, subissent une variation de leur rayon de Larmor, due à la variation locale du champ magnétique. La fuite des particules vers les parois de l'enceinte de confinement est alors de l'ordre de la milliseconde, ce qui est trop rapide pour espérer atteindre l'ignition.

Comme nous l'évoquions en introduction, c'est en 1950 que la configuration tokamak a été proposée pour la première fois, par Andrei Shkarov. L'idée est de compenser la dérive séculaire due à la courbure du système par l'ajout d'un champ magnétique poloïdal, donnant ainsi lieu à une structure de champ hélicoïdale comme montré en figure 5.3. En pratique, cet ajout est réalisé dans un premier temps par induction : un champ électrique toroïdal, créé par un solénoïde vertical central, accélère les espèces chargées et génère un courant toroïdal, dont résulte finalement le champ poloïdal induit. La quantité de flux magnétique disponible permettant cette induction étant finie, le maintien du courant toroïdal se fait dans un second temps par chauffage auxiliaire.

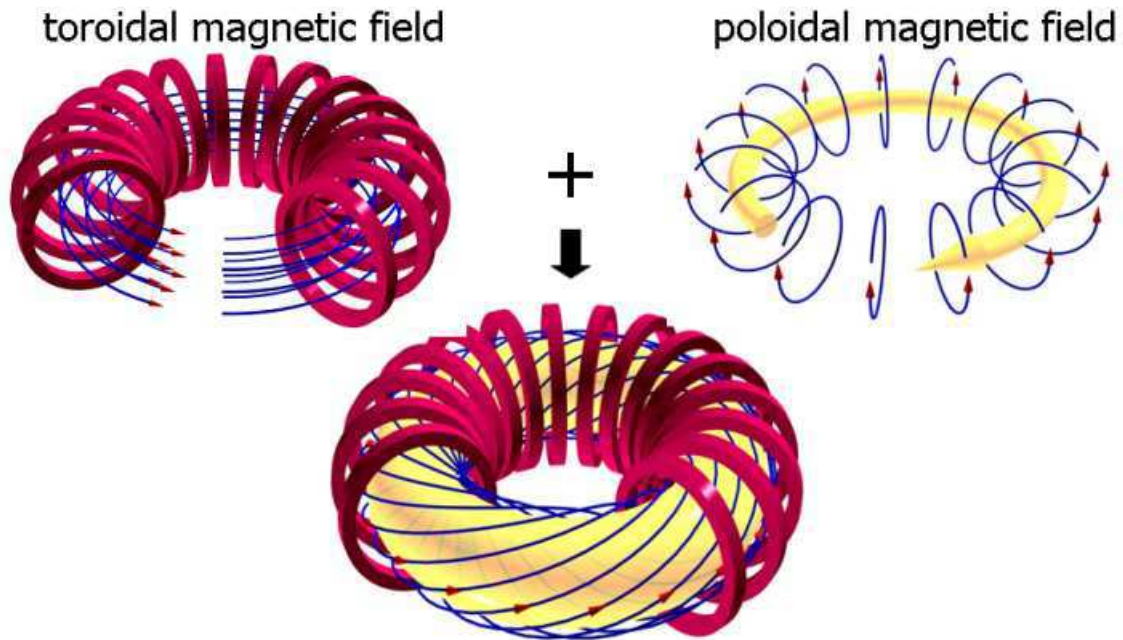


FIGURE 5.3 – Schéma de principe montrant la production du champ magnétique hélicoïdal. Figure extraite de [86].

Nous allons à présent nous pencher sur la description quantitative de la structure hélicoïdale des lignes de champ magnétique. Nous verrons que ces dernières se décrivent de façon naturelle par un formalisme hamiltonien.

2. Par une application immédiate du théorème d'Ampère, on déduit que le champ magnétique toroïdal décroît en effet de façon inversement proportionnelle à la distance depuis le centre du tore.

5.2 Formalisme hamiltonien

5.2.1 Coordonnées de flux

Nous allons définir dans ce paragraphe les coordonnées dites de flux, permettant d'accéder à la structure détaillée du champ magnétique dans l'enceinte de confinement. Définissons tout d'abord le système de coordonnées toroïdales (r, θ, ϕ) , représentées en figure 5.4, ainsi que la base covariante associée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$. Définissons de plus la base

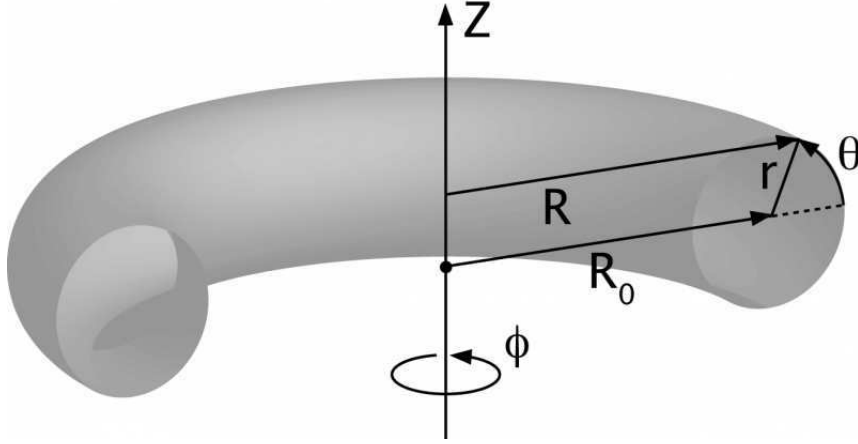


FIGURE 5.4 – Représentation des coordonnées toroïdales.

contravariante $(\nabla r, \nabla \theta, \nabla \phi)$, où chaque vecteur est orthogonal à l'isosurface définie par la coordonnée covariante associée.

Soit le potentiel vecteur \mathbf{A} dont dérive le champ magnétique \mathbf{B} . Nous pouvons l'écrire en fonction de ses coordonnées covariantes

$$\mathbf{A} = A_r \nabla r + A_\theta \nabla \theta + A_\phi \nabla \phi. \quad (5.2.1)$$

Introduisons la fonction scalaire G telle que $\partial_r G = A_r$. Le développement de ∇G sur la base contravariante s'écrit alors

$$\nabla G = A_r \nabla r + \frac{\partial G}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial G}{\partial \phi} \nabla \phi. \quad (5.2.2)$$

En remplaçant le premier terme de l'équation (5.2.1) par son expression en fonction de ∇G , nous obtenons

$$\mathbf{A} = \nabla G + \left(A_\theta - \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \nabla \theta + \left(A_\phi - \frac{\partial G}{\partial \phi} \right) \nabla \phi. \quad (5.2.3)$$

Ainsi, en prenant le rotationnel pour remonter au champ magnétique, le terme ∇G de l'équation (5.2.3) disparaît au profit de l'écriture avantageuse de \mathbf{B} sous la forme

$$\mathbf{B} = \nabla \psi_t \times \nabla \theta - \nabla \psi_p \times \nabla \phi, \quad (5.2.4)$$

où nous avons posé

$$\psi_t = A_\theta - \frac{\partial G}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \psi_p = \frac{\partial G}{\partial \phi} - A_\phi. \quad (5.2.5)$$

Cette représentation, aussi appelée représentation de Clebsch, permet d'étudier la topologie du champ magnétique grâce un formalisme indépendant de la géométrie du système. De plus, il est possible de montrer, lorsque la configuration du champ admet l'existence de surfaces magnétiques, que les deux fonctions ψ_t et ψ_p représentent respectivement les flux toroïdal et poloïdal du champ magnétique à travers les sections idoines [87, 88]. Le flux toroïdal ψ_t devient alors une coordonnée à part entière pouvant se substituer avantageusement à r . En première approximation, nous avons d'ailleurs $\psi_t \sim r^2 B_\phi$.

La représentation (5.2.4) permet en outre de mettre en évidence la nature hamiltonienne intrinsèque des lignes de champ. Ces dernières, en coordonnées de flux, vérifient

$$\frac{d\psi_t}{\mathbf{B} \cdot \nabla \psi_t} = \frac{d\theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta} = \frac{d\phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi}, \quad (5.2.6)$$

où nous avons fait appel à la base contravariante $(\nabla \psi_t, \nabla \theta, \nabla \phi)$. En remplaçant \mathbf{B} par sa représentation de Clebsch (5.2.4), nous obtenons les équations suivantes :

$$\frac{d\psi_t}{d\phi} = - \frac{\nabla \psi_t \cdot (\nabla \psi_p \times \nabla \phi)}{\nabla \phi \cdot (\nabla \psi_t \times \nabla \theta)}, \quad (5.2.7)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = - \frac{\nabla \theta \cdot (\nabla \psi_p \times \nabla \phi)}{\nabla \phi \cdot (\nabla \psi_t \times \nabla \theta)}. \quad (5.2.8)$$

En remplaçant le gradient du flux poloïdal par son expression covariante

$$\nabla \psi_p = \frac{\partial \psi_p}{\partial \psi_t} \nabla \psi_t + \frac{\partial \psi_p}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial \psi_p}{\partial \phi} \nabla \phi, \quad (5.2.9)$$

les équations des trajectoires (5.2.7) et (5.2.8) se mettent finalement sous la forme

$$\frac{d\psi_t}{d\phi} = - \frac{\partial \psi_p}{\partial \theta}, \quad (5.2.10)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial \psi_p}{\partial \psi_t}. \quad (5.2.11)$$

Les lignes de champ, en coordonnées de flux, dérivent donc d'un hamiltonien, qui n'est rien d'autre que le flux poloïdal du champ magnétique. Nous omettrons alors dès à présent l'indice "t" pour le flux toroïdal, afin de ne pas le confondre avec le flux poloïdal que nous noterons parfois $\mathcal{H} = \psi_p$.

Nous allons considérer dans la suite une configuration magnétique axisymétrique dite d'équilibre, c'est-à-dire une configuration telle que le hamiltonien \mathcal{H} des lignes de champ ne dépende que du flux toroïdal. Les équations (5.2.10) et (5.2.11) se réduisent alors à

$$\frac{d\psi}{d\phi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}. \quad (5.2.12)$$

Ceci revient à considérer une configuration pour laquelle les lignes de champ s'enroulent sur des surfaces magnétiques définies par le flux toroïdal ψ les caractérisant, l'angle toroïdal ϕ jouant alors le rôle du temps dans les équations du mouvement (5.2.10)-(5.2.11). Introduisons de plus le *facteur de sécurité* q , donné par

$$\frac{1}{q(\psi)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}. \quad (5.2.13)$$

Cette quantité caractérise alors la densité de l'enroulement des lignes de champ sur les surfaces magnétiques. Les valeurs de q représentent en fait le nombre de tours toroïdaux qu'effectue une ligne de champ lors d'une révolution poloïdale. Dans une configuration où les tores magnétiques sont de section circulaire, le lien entre q et le champ magnétique s'exprime facilement comme le rapport

$$q(r) = \frac{r B_\phi}{R B_\theta}. \quad (5.2.14)$$

En réalité, les expériences en tokamak ont mis en évidence une sensibilité certaine du plasma aux instabilités d'origine magnétohydrodynamique. Le champ magnétique résultant de telles évolutions temporelles n'est alors jamais décrit exactement par le champ d'équilibre, notamment à cause de la brisure de l'axisymétrie engendrée par le déplacement du plasma. L'étude de ces mouvements se fait en introduisant des perturbations au hamiltonien intégrable,

$$\mathcal{H} = \int_0^\psi \frac{d\psi'}{q(\psi')} + \sum_{m,n} V_{mn}(\psi) \cos(m\theta - n\phi + \chi_{mn}). \quad (5.2.15)$$

L'étude des lignes de champ magnétique revient alors à considérer un problème de théorie classique des perturbations.

5.2.2 Perturbations magnétiques

Nous allons illustrer ici l'impact des perturbations magnétiques sur la topologie des lignes de champ. Considérons dans un premier temps que nous perturbions l'équilibre magnétique par l'ajout d'un seul mode (mn) , dont l'amplitude sera notée V_{mn} , prise indépendante de ψ pour simplifier. Le hamiltonien des lignes de champ est alors donné par

$$\mathcal{H} = \int \frac{d\psi}{q(\psi)} + V_{mn} \cos(m\theta - n\phi). \quad (5.2.16)$$

Les équations des lignes de champ dérivant de cet hamiltonien s'écrivent donc

$$\frac{d\psi}{d\phi} = m V_{mn} \sin(m\theta - n\phi) \quad (5.2.17)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{1}{q(\psi)}. \quad (5.2.18)$$

Si l'on se place loin d'une surface rationnelle, définie par $q(\psi) = m/n$, le flux ψ observe un mouvement oscillant. En effet, en supposant $q(\psi)$ constant pour ce type de trajectoires, nous pouvons écrire

$$\theta = \frac{\phi}{q} + \theta_0 \quad \text{et} \quad \psi = \psi_0 + \frac{V_{mn}m \cos(m\theta - n\phi)}{m/q - n}. \quad (5.2.19)$$

Les surfaces magnétiques correspondant à l'équilibre et loin des tores résonants se retrouvent donc déformées, mais leur topologie est globalement inchangée par l'ajout de la perturbation.

Si l'on se place par contre au voisinage une surface dite rationnelle, le dénominateur $m/q - n \simeq 0$ induit de grandes excursions du flux le long de la trajectoire toroïdale, et les équations du mouvement (5.2.19) ne sont plus valides. Afin de comprendre quantitativement l'action de la perturbation sur un tore résonant, changeons à présent de variables pour nous placer dans le repère de la perturbation, en posant $Q_{mn} = m\theta - n\phi$. Il vient

$$dQ_{mn} = \left(\frac{m}{q(\psi)} - n \right) d\phi. \quad (5.2.20)$$

Développons q au voisinage de ψ_{mn} , la surface résonante en question. À condition que q' , la dérivée de q , ne s'annule pas en ce point, l'équation (5.2.20) devient alors

$$dQ_{mn} \simeq -m d\phi \frac{q'}{q^2} (\psi - \psi_{mn}). \quad (5.2.21)$$

En éliminant $d\phi$ grâce à l'équation (5.2.17), nous obtenons

$$V_{mn}m \sin Q_{mn} dQ_{mn} = -m \frac{q'}{q^2} (\psi - \psi_{mn}) d\psi. \quad (5.2.22)$$

L'intégration de cette équation conduit à

$$\frac{1}{2} (\psi - \psi_{mn})^2 = \kappa_{mn} + \frac{q^2 V_{mn}}{q'} \cos Q_{mn}, \quad (5.2.23)$$

où κ_{mn} est une constante d'intégration. En d'autres termes, la dynamique des trajectoires initialement situées sur tores résonants se réécrit sous la forme d'un pendule simple, où le flux toroïdal joue le rôle de l'impulsion, et la variable Q_{mn} la position. Nous pouvons donc définir des séparatrices, localisées au voisinage de chaque tore résonant. Afin d'établir leurs équations en coordonnées de flux, remarquons que l'équation (5.2.23) fournit la contrainte³

$$\cos Q_{mn} \leq \frac{\kappa_{mn} q'}{V_{mn} q^2}. \quad (5.2.24)$$

Par conséquent, si $\kappa_{mn} \geq q^2 V_{mn} / q'$, toutes les positions Q_{mn} deviennent accessibles au système. Le seuil critique définit la séparatrice associée au mode (mn) , et nous accédons à son équation ψ^* en fonction de Q^* :

$$(\psi^* - \psi_{mn}) = \pm 2 \frac{m}{n} \sqrt{\frac{V_{mn}}{q'}} \sin \frac{Q^*}{2}. \quad (5.2.25)$$

3. Nous avons implicitement supposé que $q' > 0$.

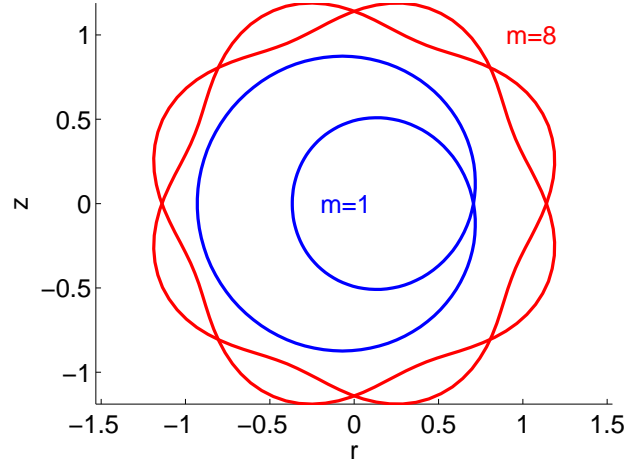


FIGURE 5.5 – Tracé de la projection poloïdale de deux séparatrices correspondant aux modes toroïdaux $m = 1$ et $m = 8$

Cette formulation permet en outre de comprendre l'apparition d'îlots magnétiques, dus à l'existence de ces séparatrices et dont la largeur en termes de flux toroïdal est immédiatement donnée par

$$\delta\psi_{mn}^* \sim \frac{4m}{n} \sqrt{\frac{V_{mn}}{q'}} \quad (5.2.26)$$

La figure 5.5 montre la structure de deux séparatrices, projetées sur un plan poloïdal, et correspondant à des modes $m = 1$ et $m = 8$. À l'intérieur, les surfaces magnétique se répartissent en tores concentriques. Nous comprenons donc intuitivement qu'en cas de recouvrement de séparatrices, les surfaces magnétiques sont détruites, rendant "stochastiques" les orbites proches des surfaces de recouvrement.

D'un point de vue physique, le recouvrement de résonances peut être catastrophique pour le confinement. En effet, en partant du principe que les électrons du plasma suivent les lignes de champ, une structure stochastique de ce dernier empêcherait par exemple le tokamak de maintenir une température suffisamment élevée au centre, ce dernier étant le siège d'un transport chaotique vers et depuis les bords, plus froids.

5.3 Equilibre magnétohydrodynamique

5.3.1 Équation de Grad-Shafranov

Au cours du paragraphe précédent, nous nous sommes appuyés sur la définition formelle du facteur de sécurité q pour définir notre hamiltonien d'équilibre. Nous allons ici établir le lien physique avec le plasma en adoptant une approche MHD (**M**agnéto-**H**ydro**D**ynamique). Nous devons ce domaine à Hannes Alfvén, qui fut le premier à considérer un plasma sous son aspect fluide.

En notant ρ la densité du plasma, \mathbf{v} son champ de vitesses Eulérien, P sa pression et \mathbf{j} le courant associé, les équations principales de la MHD à un fluide s'écrivent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v} \quad (5.3.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad} P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (5.3.2)$$

$$\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5.3.3)$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} vérifient quant à eux les équations de Maxwell. La première équation traduit la conservation locale de la quantité de matière, la seconde n'est rien d'autre que l'équation d'Euler, prenant en compte la force magnétique volumique, et la dernière la loi d'Ohm locale. L'hypothèse principale de la MHD *idéale* est de considérer la résistivité du plasma comme nulle, c'est-à-dire $\eta = 0$. L'équation (5.3.3) s'écrit alors simplement $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Dans le cas du régime stationnaire, l'équation d'Euler (5.3.2) fournit

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{grad} P = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (5.3.4)$$

En notant L une longueur caractéristique du système, nous avons, en ordre de grandeur,

$$\left. \begin{array}{l} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \simeq \frac{\rho v^2}{L} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{B} \simeq \frac{B^2}{\mu_0 L} \end{array} \right\} \longrightarrow \rho \frac{\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{j} \times \mathbf{B}\|} \simeq \frac{v^2}{v_A^2}, \quad (5.3.5)$$

où $v_A = \sqrt{B^2/\mu_0 \rho}$ est la vitesse d'Alfvén. En général, $v \ll v_A$, ce qui nous amène finalement à l'équation de Grad-Shafranov :

$$\mathbf{grad} P = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (5.3.6)$$

Afin d'obtenir une solution de cette équation, nous allons nous placer dans un tokamak à section circulaire de rayon a et de rayon principal R_0 . Après quelques calculs [89, 90], cette équation se réécrit grâce au flux poloïdal sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_p}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial \theta^2} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x \cos \theta} \left(\frac{\partial \psi_p}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial \psi_p}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{x} \right) \\ = -16\pi^3 a^2 R_0^2 (1 + \varepsilon x \cos \theta)^2 \frac{dP}{d\psi_p} - \frac{8\pi^2 a^2}{c^2} \frac{dI^2}{d\psi_p}, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

où nous avons posé $x = r/a$ le rayon normalisé, $\varepsilon = a/R_0$ le rapport d'aspect, et I le courant poloïdal.

5.3.2 Solution perturbative

Dans toute l'étude numérique qui fera l'objet du Chapitre 6, nous aurons besoin d'une configuration magnétique d'équilibre, solution de l'équation de Grad-Shafranov, et idéalement analytique afin de faciliter son implémentation numérique. Dans cette optique, nous allons développer perturbativement l'équilibre cylindrique, en utilisant

5.3. EQUILIBRE MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

comme paramètre de développement le rapport d'aspect ε . Ainsi, en se limitant au premier ordre,

$$\psi_p(x, \theta) = \psi_p^{(0)}(x) + \varepsilon \psi_p^{(1)}(x, \theta). \quad (5.3.8)$$

Dans toute la suite, nous n'utiliserons que des variables adimensionnées. En notant B_0 le champ magnétique toroïdal sur l'axe magnétique, posons

$$\tilde{\psi}_p = \frac{\psi_p}{\pi a^2 B_0}, \quad \tilde{p} = \frac{8\pi p}{B_0^2}, \quad \text{et} \quad \tilde{I} = \frac{2I}{c B_0 R_0}. \quad (5.3.9)$$

Afin d'obtenir une forme close pour ψ_p , nous développons la pression et le courant magnétique comme

$$\tilde{p} = \tilde{p}_1 \tilde{\psi}_p^2 \quad \text{et} \quad \tilde{I}^2 = \tilde{I}_0^2 + \tilde{I}_1^2 \tilde{\psi}_p^2. \quad (5.3.10)$$

Nous omettons dans la suite les tildes afin d'alléger les notations. Après résolution perturbative [90, 91], nous obtenons

$$\psi_p^{(0)}(x) = C J_0(kx), \quad (5.3.11)$$

$$\psi_p^{(1)}(x, \phi) = \frac{\cos \phi}{2} \left[C \left(x J_0(kx) - \frac{\sigma x^2}{k} J_1(kx) \right) - D J_1(kx) \right], \quad (5.3.12)$$

avec

$$k^2 = \frac{4}{\varepsilon^2} (p_1 + I_1^2), \quad (5.3.13)$$

$$\sigma = \frac{4p_1}{\varepsilon^2}, \quad (5.3.14)$$

$$D = -\sigma \frac{C}{k}. \quad (5.3.15)$$

Nous fixons la constante C en définissant la valeur du flux poloïdal en $x = 1$. De plus, imposer $\psi_p(x = 1, \theta) = 0$ revient à fixer la valeur de k , cette dernière devant alors être le premier zéro de la fonction de Bessel J_0 . Enfin, nous gardons la pression p_1 comme paramètre libre, définissant le régime de fonctionnement du tokamak. L'équilibre ainsi défini fournit un profil q représenté en figure 5.6. Enfin, nous pouvons remonter au champ magnétique grâce aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial \psi_p}{\partial z}, \\ B_z &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi_p}{\partial r}, \\ B_\theta &= \frac{2I}{cr}. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Seulement ici le flux poloïdal est donné en variables toroïdales. Afin d'obtenir le champ d'équilibre en coordonnées cylindriques⁴, appliquons la transformation suivante au système (5.3.17),

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} \cos \phi & a^{-1} \sin \phi \\ -(ax)^{-1} \sin \phi & (ax)^{-1} \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ dz \end{bmatrix}, \quad (5.3.17)$$

4. En raison de leur simplicité, nous utilisons numériquement les coordonnées cylindriques afin d'intégrer les trajectoires de particules test.

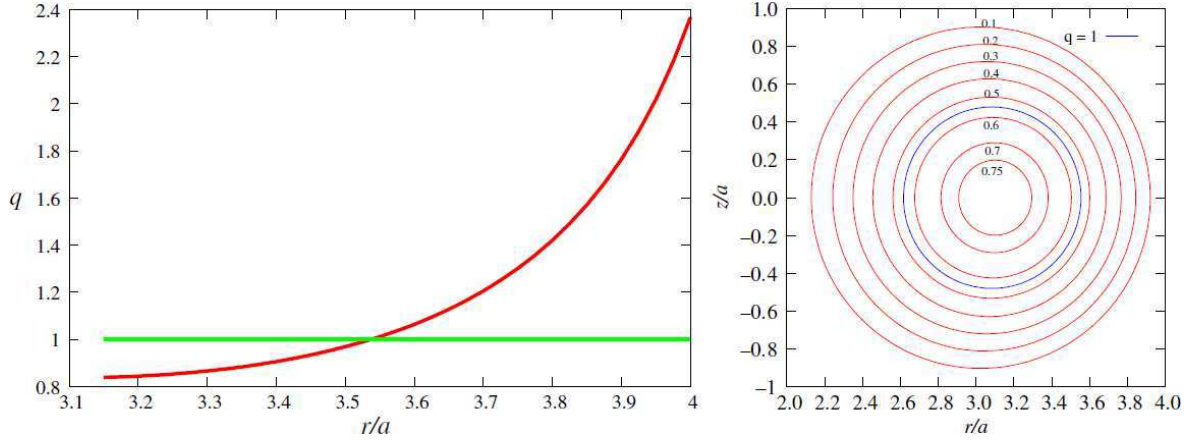


FIGURE 5.6 – À gauche, tracé du profil q en fonction de la distance normalisée à l'axe magnétique. À droite, la coupe sur un plan poloïdal des tores magnétiques définis par l'équilibre (5.3.6).

Finalement,

$$\begin{aligned}
 B_r &= \frac{-\varepsilon}{2(1 + \varepsilon x \cos \phi)} \left(\sin \phi \frac{\partial \psi_p}{\partial x} + \frac{\cos \phi}{x} \frac{\partial \psi_p}{\partial \phi} \right), \\
 B_z &= \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon x \cos \phi)} \left(\cos \phi \frac{\partial \psi_p}{\partial x} - \frac{\sin \phi}{x} \frac{\partial \psi_p}{\partial \phi} \right), \\
 B_\theta &= \frac{I}{1 + \varepsilon x \cos \phi}.
 \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Chapitre

6

Étude de la diffusion d'ions Nickel dans JET lors d'un effondrement de dents de scie

Sommaire

6.1	Remise en question du transport stochastique	109
6.1.1	Le régime dents de scie	109
6.1.2	Expérience dédiée	112
6.2	Étude numérique	113
6.2.1	Modèle empirique des dents de scie	113
6.2.2	Comparaison intégrable-stochastique	115
6.2.3	Effets d'amplitude	121
6.2.4	Vitesse de dérive	122
6.3	Conclusion	123

6.1 Remise en question du transport stochastique

6.1.1 Le régime dents de scie

L'instabilité "dents de scie" ou *sawtooth* en anglais se présente comme un régime de fonctionnement durant lequel les observables principales telles que la température ou la densité électronique présentent des oscillations asymétriques très prononcées. Depuis leur première observation en 1974 [92], ces oscillations ont été retrouvées sur tous les tokamaks en service dans le monde.

Durant une période d'oscillation, la température électronique centrale suit une augmentation lente, étalée sur une durée de l'ordre de 100 ms, avant de subir une chute extrêmement brutale, appelée "crash", ne durant, elle, que 100 μ s tout au plus, compromettant le confinement des particules. La figure 6.1, issue de [93], montre quelques cycles de dents de scie obtenus dans le tokamak JET, où l'on peut observer la diffusion rapide de température du centre vers les bords, témoignant d'une rupture du confinement durant le crash.

À partir d'un profil de sécurité vérifiant $q(0) > 1$, les effets ohmiques dus au courant électronique augmentent préférentiellement la température au centre, la densité de plasma y étant plus importante qu'ailleurs. La résistivité du plasma diminue alors¹, ce qui a pour effet d'augmenter encore le courant électronique. Le champ magnétique poloïdal augmente aussi, diminuant finalement q au centre (voir l'équation (5.2.14)). À terme, $q(0) < 1$, ce qui déclenche [94] l'instabilité *kink*, correspondant à la croissance d'une perturbation de mode poloïdal $m = 1$, et toroïdal $n = 1$. Son évolution non linéaire conduit à une réorganisation de la topologie du champ magnétique, accompagnée d'une homogénéisation de température. Notons que les prédictions théoriques de Rosenbluth *et. al.* [94] furent publiées *avant* les premières mesures expérimentales [92].

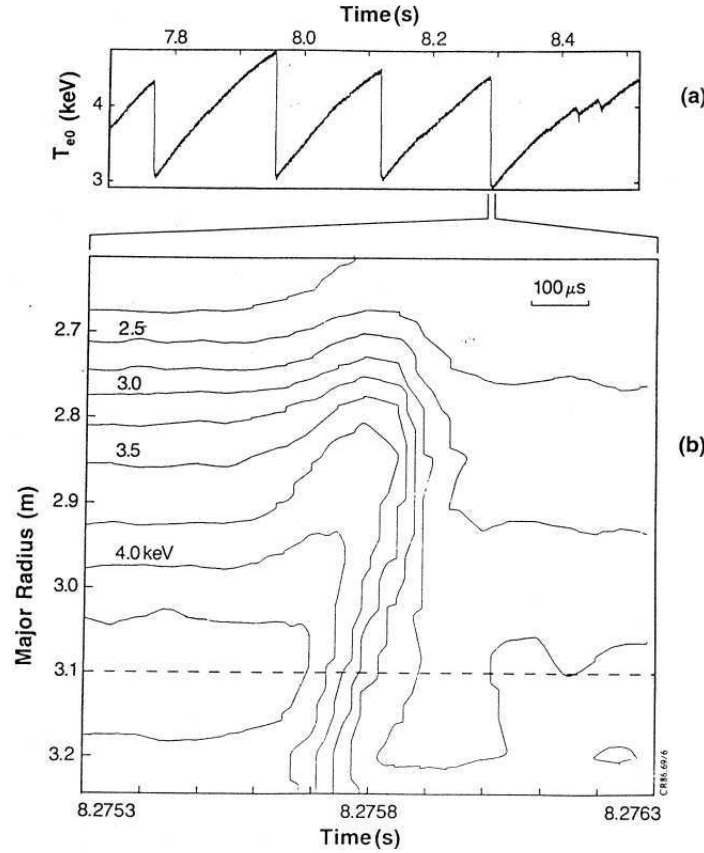


FIGURE 6.1 – Observation expérimentale de cycles de dents de scie dans le tokamak JET [93]. Le tracé du haut représente la température électronique centrale, qui oscille en dents de scie. La figure du bas détaille la répartition spatiale de la température durant la phase de crash (la décroissance brutale).

L'article de Kadomtsev [95] présente un modèle, dit de reconnexion totale, sans stochasticité, basé sur la réorganisation de la topologie du champ magnétique pour ex-

1. La résistivité η diminue avec la température comme $\eta \propto T^{-3/2}$ [87].

plier le phénomène de dents de scie. Expérimentalement, ses prédictions n’ont jamais pu être vérifiées, et le mécanisme précis de l’instabilité est aujourd’hui toujours encore mal compris malgré les nombreuses études expérimentales et modélisations théoriques dédiées au sujet [96–98].

La question du transport durant un crash de dent de scie est au coeur de nombreuses investigations. Il est à l’heure actuelle largement admis que le transport, dont les propriétés sont liées à la structure des lignes de champ, est favorisé par la stochasticité de ces dernières. En effet, si l’on considère en première approximation que les particules chargées suivent les lignes de champ, dans le cas o   les trajectoires de ces dernières dérivent d’un hamiltonien intégrable, les particules seront contraintes d’évoluer au voisinage des surfaces magnétiques présentées au Chapitre 5. Si par contre le hamiltonien n’est pas intégrable, cas que nous qualifions de “stochastique”, les surfaces magnétiques, nous l’avons vu, sont en majorité détruites. Un tracé de la section de Poincaré, comme exposé en figure 6.2, permet de comprendre qualitativement alors pourquoi le transport est possible. En effectuant plusieurs tours de tokamak, les particules explorent une large zone spatiale, et non plus seulement le tore magnétique du cas intégrable.

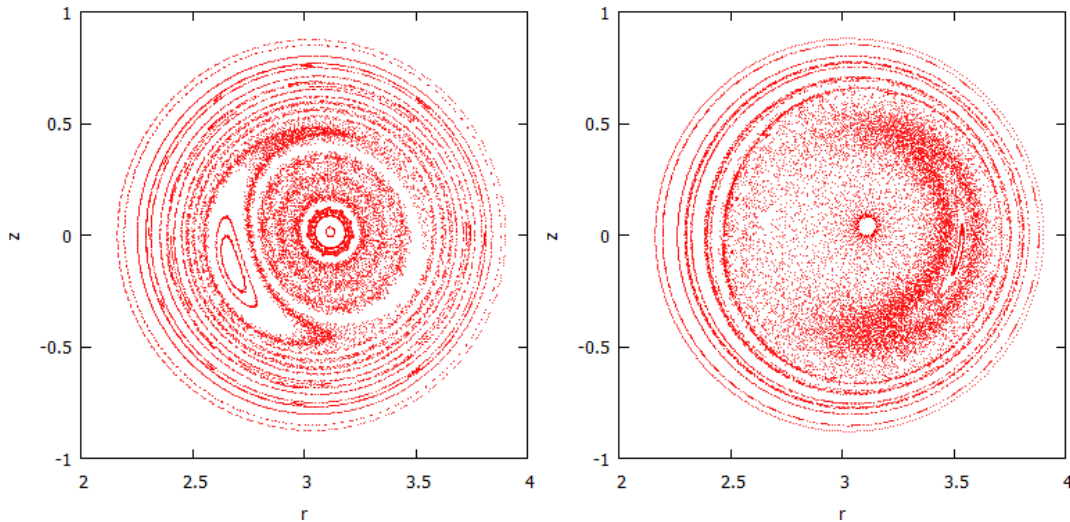


FIGURE 6.2 –   gauche, le plot de Poincaré d’une configuration magnétique à travers une section poloïdale dans une situation “peu” stochastique. On distingue encore parfaitement la séparatrice correspondant au mode (11).   droite, même chose mais dans un cas o   le recouvrement entre séparatrices donne lieu à un chaos plus prononcé, permettant aux lignes de champ d’explorer, en quelques tours de tokamak seulement, une large zone spatiale.

6.1.2 Expérience dédiée

En 1997, un essai dans le tokamak JET par l'équipe de John Wesson [82] caractérisa pour la première fois le temps caractéristique de diffusion de particules lourdes. L'expérience, qui se voulait tester l'hypothèse du transport stochastique, consista à injecter du Nickel au voisinage de la surface $q = 1$, et d'en observer la diffusion vers le centre du tokamak par reconstruction tomographique à rayons X. La compréhension du transport de particules lourdes est capitale afin d'atteindre la fusion. En effet, dans un tokamak réel, les bords de la chambre de confinement sont une source privilégiée d'impuretés telles que le carbone ou le tungstène, éléments relativement lourds et susceptibles de diffuser vers le centre du tokamak, perturbant potentiellement les conditions d'ignition par absorption d'énergie.

Le résultat principal de l'article de Wesson est donné en figure 6.3, et montre une diffusion des particules de Nickel vers la partie centrale de l'enceinte de confinement en un temps de l'ordre de $50 \mu s$. À la température de fonctionnement, donnée pour

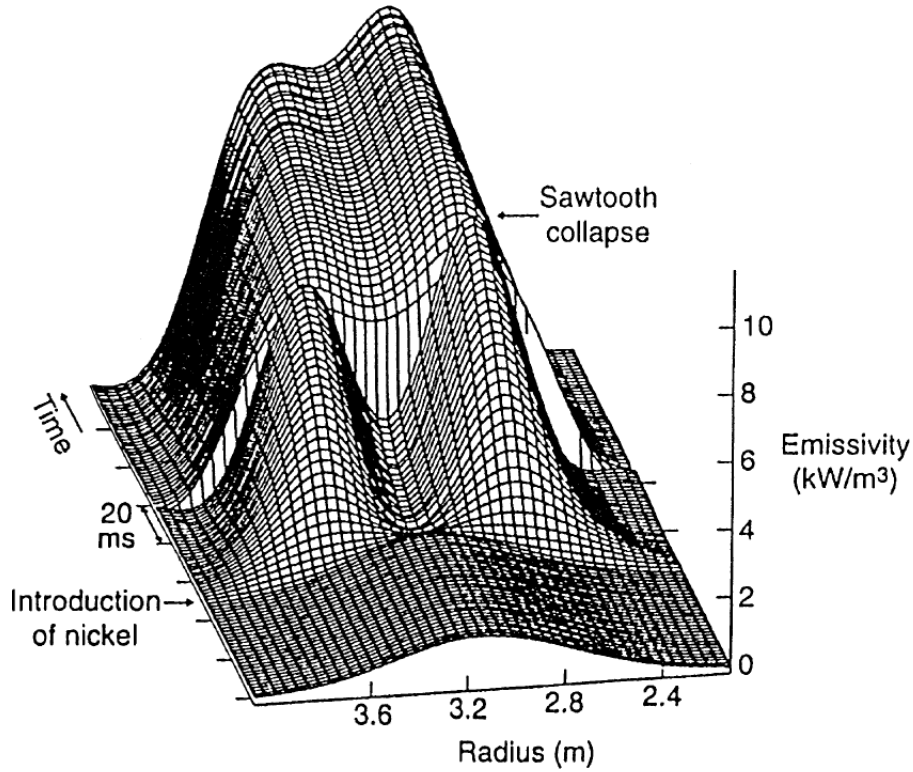


FIGURE 6.3 – Profil d'émissivité X des particules de Nickel pendant un crash. La figure provient de [82].

$E = 8 \text{ keV}$, un rapide calcul d'ordre de grandeur donne la distance parcourue par les différentes particules durant le crash. À partir de leur vitesse $v \simeq \sqrt{2E/m}$, pour une durée de crash de $50 \mu s$, les électrons parcourent environ 2 km, tandis que les ions Nickel, du fait de leur masse bien plus importante, parcourent environ seulement 6 m,

ce qui est très insuffisant pour pouvoir justifier de plusieurs tours de tokamak et diffuser vers le centre en suivant les lignes de champ, dont la structure serait stochastique. C'est donc à juste titre que Wesson se pose la question de la validité du modèle de transport stochastique.

Nous allons tenter de répondre à cette question en adoptant une approche MHD idéale. La durée du crash étant très faible, il est légitime de négliger les effets collisionnels qui n'ont pas le temps de se manifester.

6.2 Étude numérique

6.2.1 Modèle empirique des dents de scie

À partir du champ magnétique d'équilibre \mathbf{B}_0 , nous définissons le champ magnétique total $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, où \mathbf{B}_1 est supposé faible devant \mathbf{B}_0 . En pratique, $B_1/B_0 \simeq 10^{-2}$.

Grâce à la loi d'Ohm $\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, la relation de Maxwell-Faraday se réécrit à l'ordre 1 en perturbation

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}. \quad (6.2.1)$$

En écrivant $\boldsymbol{\xi}$ le champ de déplacement du plasma tel que $\partial \boldsymbol{\xi} / \partial t = \mathbf{v}$, on obtient

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{rot} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0), \quad (6.2.2)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0. \quad (6.2.3)$$

On peut donc calculer le champ électromagnétique perturbé à partir de la “simple” donnée du déplacement du plasma. De plus, en considérant un déplacement incompressible, c'est-à-dire vérifiant $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, le calcul de \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 ne nécessite plus que la connaissance de la composante radiale de $\boldsymbol{\xi}$. C'est pourquoi nous allons décrire cette dernière par

$$\xi^{mn}(r, t) = \xi_0^{mn}(t) f^{mn}(r) \cos(m\phi - n\theta - \omega_{mn}t + \chi_{mn}), \quad (6.2.4)$$

où les entiers m et n représentent respectivement les nombres d'onde toroïdaux et poloïdaux. Les quantités ξ_0^{mn} et f^{mn} représentent quant à elles respectivement la dépendance temporelle due à l'instabilité et la dépendance radiale de la perturbation.

Nous avons choisi de modéliser la dépendance temporelle en deux parties, une pour la phase de croissance de l'instabilité ($t < t_c$), l'autre pour le crash ($t > t_c$), les deux étant reliées de façon continue et dérivable.

$$\xi_0^{mn}(t) = \xi_0^{mn} \left(c_{mn} + (1 - c_{mn}) e^{-(t-t_c)^2 / (2\sigma_{mn}^2)} \right) \quad \forall t \leq t_c, \quad (6.2.5)$$

$$\xi_0^{mn}(t) = (1 - r_{mn}) \xi_0^{mn} e^{-(t-t_c)^2 / (2\sigma_{mn}'^2)} + r_{mn} \xi_0^{mn} \quad \forall t > t_c, \quad (6.2.6)$$

Le paramètre libre c_{mn} permet de fixer la valeur initiale du mode en question, tandis que r_{mn} définit la valeur asymptotique du même mode en fin de crash. Enfin, σ_{mn}^2 décrit

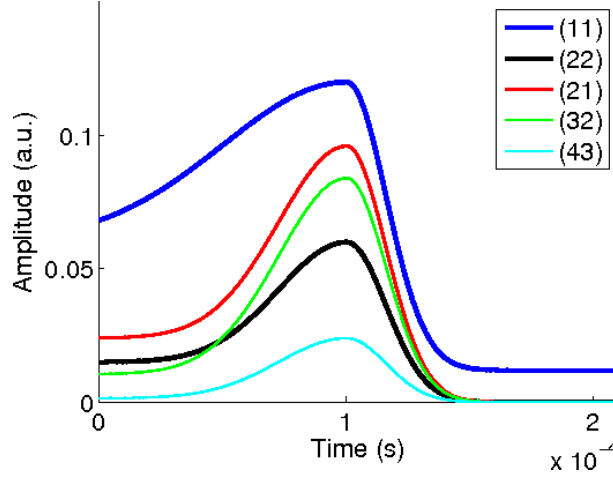


FIGURE 6.4 – Tracé de la dépendance temporelle des modes pour le modèle complet. Les modes non-intégrables (21), (32) et (43), en plus d’avoir été choisis tels que leur amplitude maximale reste “raisonnable”, ont aussi été implémentés tels que leur apparition soit retardée par rapport aux modes intégrables (11) et (22).

le taux de croissance de l’instabilité. La figure 6.4 représente les différentes dépendances temporelles choisies pour le modèle complet durant un cycle de dent de scie.

Concernant les dépendances radiales f^{mn} , nous disposons de la donnée expérimentale obtenue par Igochine pour le tokamak ASDEX en référence [99] grâce à une reconstruction tomographique. Nous avons utilisé un fit numérique de ces données expérimentales pour les modes (11) et (22), les seuls résolus². Le mode (21) est quant à lui pris gaussien, en raison du choix fait par nos collaborateurs argentins. Une telle forme reste cohérente avec le résultat de l’équation (6.2.10)

$$f^{11}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh[\delta(x - x_1)] \quad (6.2.7)$$

$$f^{22}(x) = \begin{cases} \cos^2\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-x_2}{x_2}\right)\right] & \text{si } x \leq x_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2.8)$$

$$f^{21}(x) = \exp\left[-\frac{(x - x_{21})^2}{2\sigma_{21}^2}\right] \quad (6.2.9)$$

Sans information expérimentale complémentaire, la dépendance spatiale des autres modes sera prise selon le calcul dans le cas cylindrique [89, 100].

$$f^{mn}(r) = \frac{r}{R_0} \left(\frac{r}{r_s}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{q(r)} - \frac{n}{m}\right) \Theta\left(\frac{m}{n} - q(r)\right), \quad (6.2.10)$$

où r_s est tel que $q(r_s) = 1$, et où Θ représente la distribution de Heaviside. La figure 6.5 représente les dépendances radiales telles qu’utilisées dans nos simulations numériques.

2. Le mode (33) a lui aussi été résolu spatialement, mais son amplitude est anecdotiquement faible pour être prise en compte.

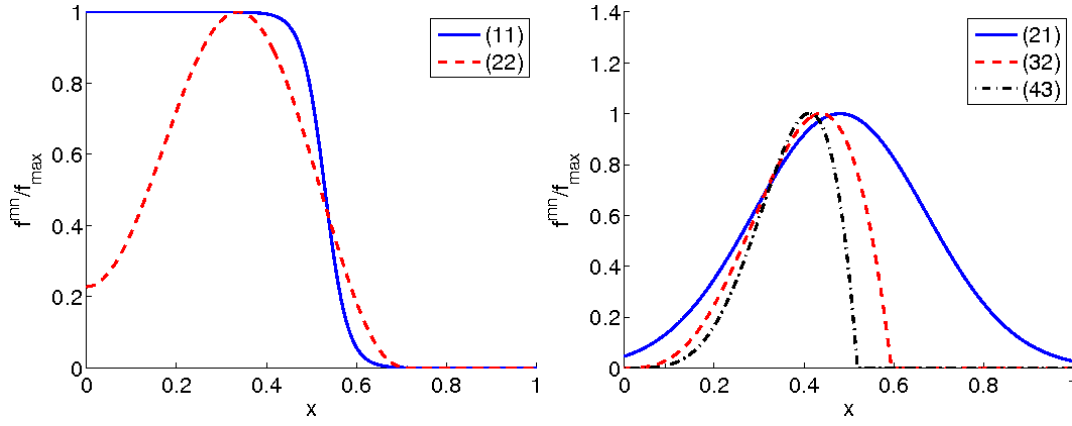


FIGURE 6.5 – À gauche, la dépendance spatiale normalisée des modes intégrables (11) et (22), provenant d'un fit expérimental [99], rappelé par les équations (6.2.7) et (6.2.8). À droite, les modes stochastiques (21), (32) et (43), donnés respectivement par les équations (6.2.9) et (6.2.10).

6.2.2 Comparaison intégrable-stochastique

Nous avons développé un code numérique basé sur un algorithme de type Runge-Kutta d'ordre quatre, intégrant les équations du mouvement de particules test pendant une durée donnée. Pour chaque particule, repérée par sa position $\mathbf{r}(x, \theta, \phi)$, nous avons, en variables adimensionnées,

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}^2} = \gamma \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{E}}_1, \quad (6.2.11)$$

où la quantité sans dimension γ est définie par

$$\gamma = \frac{v_0}{\Omega_{\text{Ni}} a}, \quad (6.2.12)$$

v_0 correspondant à une vitesse caractéristique³, et $\Omega_{\text{Ni}} = q_{\text{Ni}} B_0 / m_{\text{Ni}}$, la pulsation cyclotronique du Nickel. La référence [101] suggère que les particules de Nickel étaient chargées +26 lors du *shot* en question.

Étant donné le profil q calculé grâce à la solution perturbative de Grad-Shafranov, nous avons initialement réparti, sur un même plan poloïdal, N particules de Nickel à des distances comprises entre 0.3 m et 0.5 m de l'axe magnétique, ce qui correspond à les distribuer au voisinage de la surface $q = 1$. Nous avons fixé leurs énergies à 8 keV, et distribué leurs vitesses de façon totalement isotrope.

Le but de cette étude numérique étant de tester l'hypothèse de transport stochastique, nous avons comparé la diffusion des particules de Nickel avec et sans modes intégrables. Nous donnons les paramètres de simulation en table (6.1).

La figure 6.6 montre la distribution finale de particules, c'est-à-dire après environ 200 μs , avec et sans modes intégrables. Dans ce dernier cas, nous observons que le

3. Nous prenons en pratique la vitesse initiale donnant l'énergie souhaitée.

Mode	$\xi_{\max}^{mn}/\xi_{\max}^{11}$	ω_{mn}/ω_{11}
(11)	1.0	1.0
(22)	0.5	2.0
(21)	0.8	1.5
(32)	0.7	2.5
(43)	0.2	3.5

TABLE 6.1 – Paramètres des modes

Nickel n'a que très peu colonisé le centre du tokamak, contrairement au cas où tous les modes étaient présents. Dans les deux cas, comme pressenti par Wesson, la distance

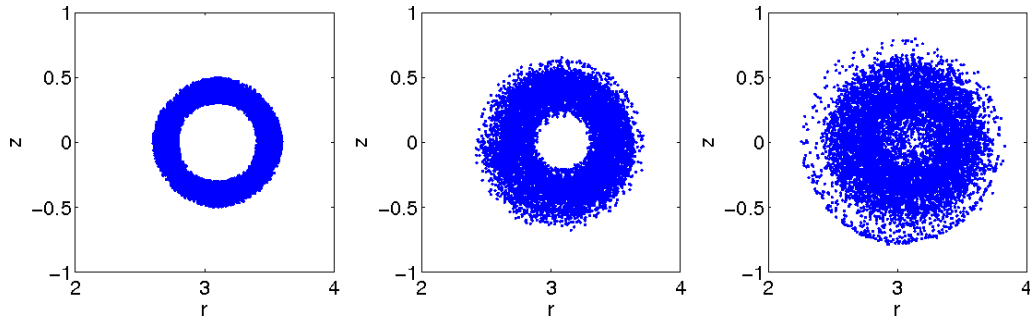


FIGURE 6.6 – Projections poloïdales de la distribution des particules de Nickel. À gauche, la configuration initiale. Au centre, la distribution après environ $200\mu s$, réalisée avec les modes (11) et (22) seuls. À droite, la même chose mais avec le modèle complet, c'est-à-dire prenant en compte les modes (11), (22), (21), (32) et (43).

totale parcourue par les ions Nickel n'excède pas quelques mètres. Le transport de ces particules vers le centre dans la situation du modèle complet se fait donc essentiellement radialement, et non pas le long des lignes de champ.

En notant η la fraction de particules se trouvant à l'intérieur du tore magnétique défini par $q = 1$, nous pouvons suivre temporellement l'évolution de cet indicateur de transport dans les cas intégrable comme stochastique. La figure 6.7 montre que dans le cas intégrable, η subit une diminution conséquente aux alentours de $80\mu s$, alors que le modèle complet maintient sa fraction de particules au centre relativement constante.

Nous pouvons aussi nous intéresser à la distribution en énergie cinétique des particules. Le panel de gauche de la figure 6.8 montre que le cas stochastique permet aux particules d'explorer un vaste domaine d'énergie par rapport au cas intégrable. Étant donné l'élargissement de la distribution en énergie cinétique observée en figure 6.8, nous pourrions nous demander si les particules ayant rejoint le centre sont celles dont l'énergie cinétique est élevée. La figure 6.9 met en évidence le fait que ce n'est pas le cas, les particules du centre possédant une énergie moyenne proche de la valeur initiale.

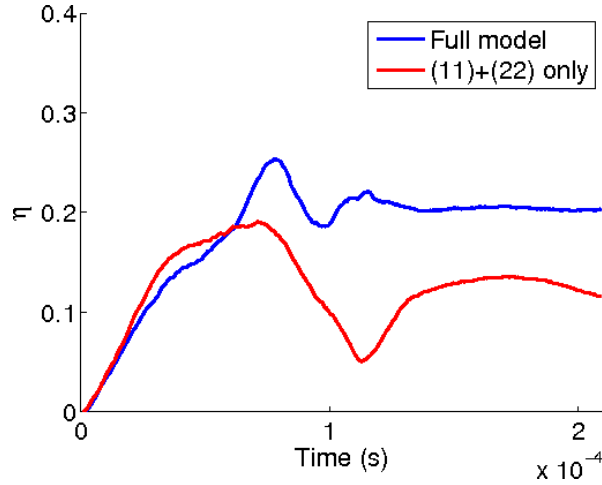


FIGURE 6.7 – Tracé de la quantité η en fonction du temps, qui représente la fraction de particules à l'intérieur du tore magnétique $q = 1$. La courbe rouge représente le modèle intégrable, tandis que la bleue représente le résultat du modèle complet, révélant une valeur finale de η plus élevée que dans le cas intégrable.

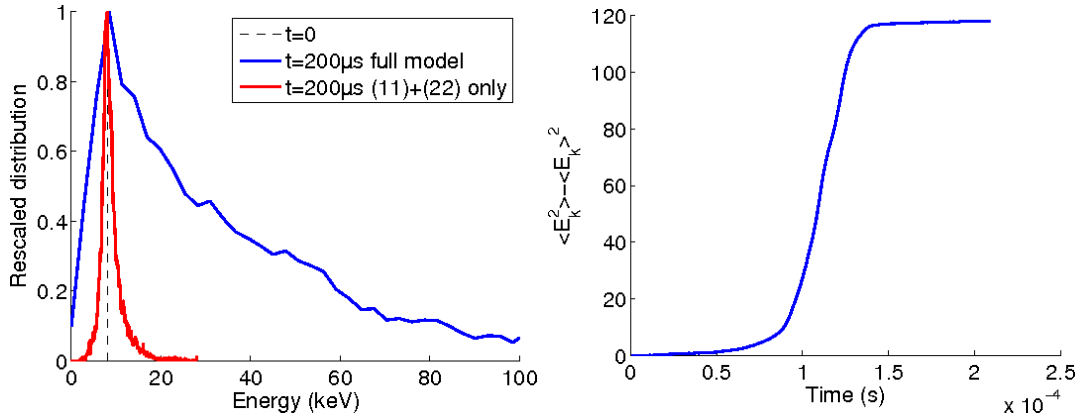


FIGURE 6.8 – À gauche, la comparaison entre les cas intégrable (courbe rouge très piquée) et stochastique (courbe bleue) de la distribution finale d'énergie cinétique. Le pic pointillé représente la distribution initiale, soit un Dirac piqué à 8keV. À droite, l'évolution temporelle de la variance de l'énergie cinétique dans le cas stochastique.

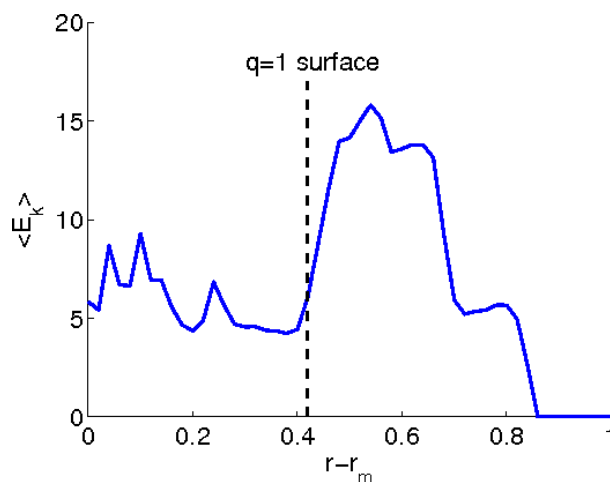


FIGURE 6.9 – Tracé de l'énergie cinétique moyenne en fin de crash en fonction de la distance à l'axe magnétique. Les particules les plus énergétiques ne sont en moyenne pas au centre.

La dépendance temporelle que nous avons utilisée ici est toutefois critiquable, dans le sens où la durée de la phase de crash est sans doute trop longue. Les références [90, 100] utilisent en effet une dépendance où la chute d'amplitude est bien plus marquée. Les dérivées temporelles devenant très grandes dans ce cas, il aurait été possible de soupçonner l'intensité du champ électrique⁴ comme facteur prépondérant dans diffusion du Nickel vers le centre. Notre choix prouve toutefois que la diffusion n'est pas subordonnée à une valeur excessive du champ électrique, mais bien à la topologie de ce dernier.

Plaçons-nous à présent dans une situation plus réaliste, pour laquelle les modes temporels sont reportés en figure 6.10. Les coefficients σ'_{mn}^2 intervenant dans l'expression (6.2.6) ont été divisés par dix par rapport à la première simulation. Les nouvelles dépendances temporelles sont présentées en figure 6.6. Afin de suivre plus précisément ce qu'il se passe pour les particules de Nickel, nous allons cette fois en répartir un certain nombre sur un cercle centré sur l'axe magnétique de la configuration d'équilibre, et correspondant approximativement à la section du tore $q = 1$. La vitesse des particules est cette fois-ci choisie purement toroïdale. Le résultat de la simulation, donné en figure 6.11, montre la déformation de la condition initiale, puis la perte de cohérence spatiale entre les particules dès $100 \mu s$, ce qui correspond au crash.

4. L'intensité du champ électrique fait intervenir explicitement les variations temporelles des amplitudes des modes de perturbation, cf. Annexe D.

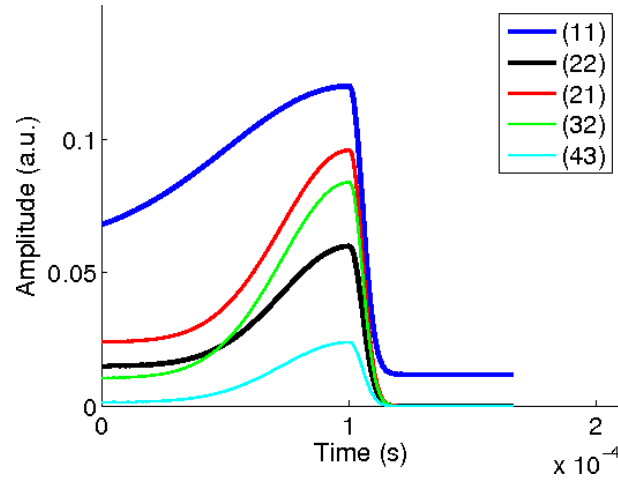


FIGURE 6.10 – Tracé de la dépendance temporelle des modes, avec un paramètre de décroissance plus réaliste que ce qui est présenté en figure 6.4.

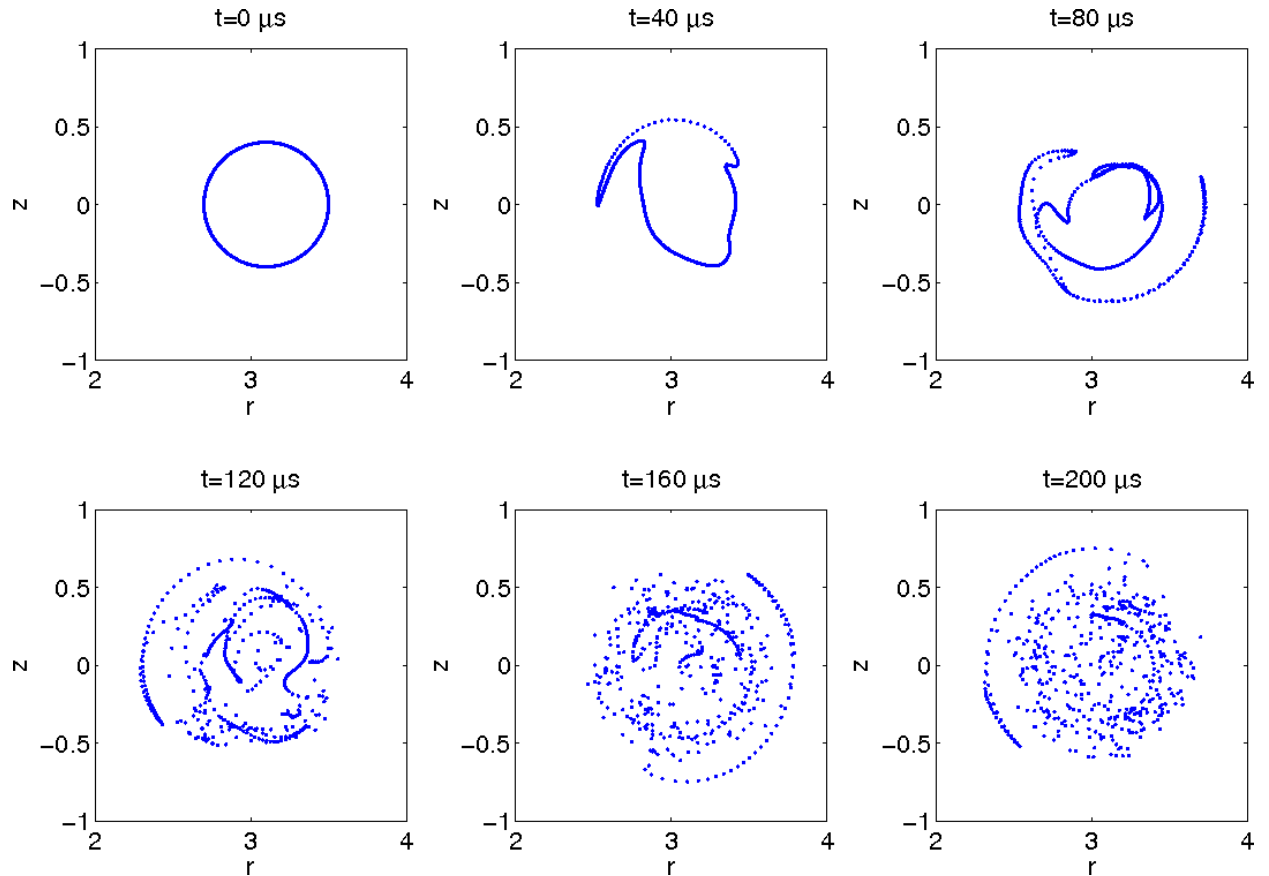


FIGURE 6.11 – Succession de distributions instantanées espacées de $40 \mu s$. On observe la déformation progressive de la distribution initiale, avant d’assister à son “éclatement” peu après $100 \mu s$.

Il est possible de quantifier cette décorrélation en introduisant l'exposant de Lyapunov à temps fini. Si nous considérons deux trajectoires proches et séparées par l'écart $\delta \mathbf{x}(t)$, connu à $t = t_0$, alors

$$\|\delta \mathbf{x}(t_0 + T)\| = \sqrt{\langle \delta \mathbf{x}(t_0), \nabla \phi^\dagger \nabla \phi \delta \mathbf{x}(t_0) \rangle}, \quad (6.2.13)$$

où $\nabla \phi$ vérifie $\dot{\delta \mathbf{x}} = \nabla \phi \delta \mathbf{x}$. L'écart maximum entre les deux trajectoires est donc atteint lorsque la perturbation initiale $\delta \mathbf{x}(t_0)$ est choisie selon une direction associée à la valeur propre maximale λ_{\max} de la matrice $\nabla \phi^\dagger \nabla \phi$. Ainsi, en notant $\overline{\delta \mathbf{x}(t_0)}$ la perturbation dans cette direction,

$$\max_{\delta \mathbf{x}(t_0)} \|\delta \mathbf{x}(t_0 + T)\| = \sqrt{\lambda_{\max}} \|\overline{\delta \mathbf{x}(t_0)}\|, \quad (6.2.14)$$

Finalement, on définit l'exposant de Lyapunov à temps fini au point \mathbf{x} par

$$\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \log \sqrt{\lambda_{\max}}, \quad (6.2.15)$$

En pratique, nous avons réparti $3 \cdot 10^4$ ions Nickel de façon uniforme sur une section poloïdale du tokamak en leur communiquant une vitesse uniforme et purement toroïdale, puis avons calculé l'exposant de Lyapunov local après un cycle de dents de scie. Le résultat est rapporté en figure 6.12.

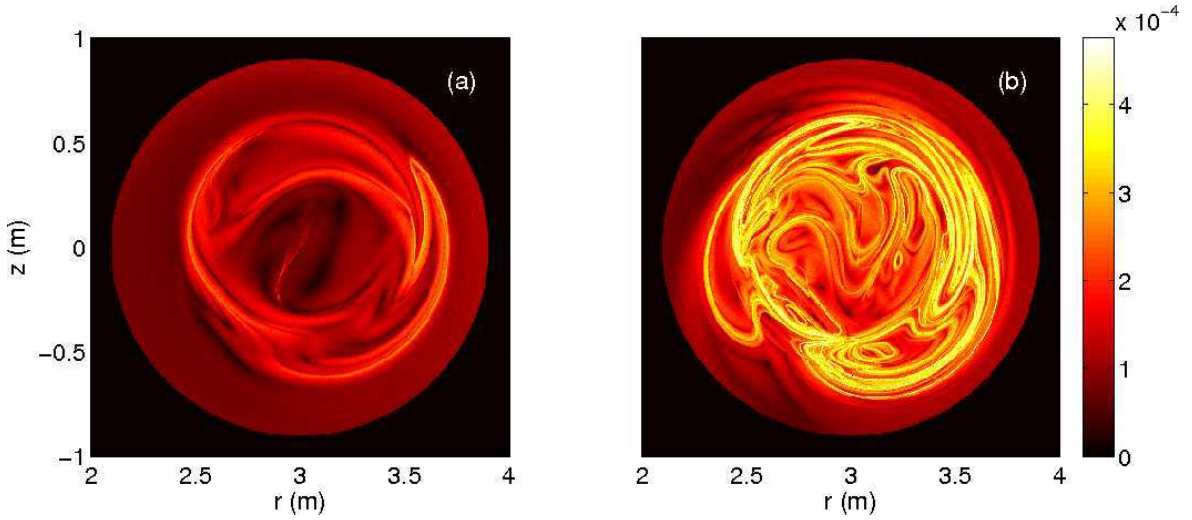


FIGURE 6.12 – Comparaison entre les cas intégrable (à gauche) et stochastique (à droite) de l'exposant de Lyapunov local (6.2.15) après $200 \mu\text{s}$ d'évolution. Le cas stochastique fait apparaître un chaos développé à l'intérieur de la surface $q = 1$.

Le cas stochastique met en évidence une zone de chaos à l'intérieur de la surface $q = 1$, ce qui n'est pas le cas pour la version intégrable du modèle.

6.2.3 Effets d'amplitude

Nous venons de voir que le fait d'ajouter des modes non-intégrables permettait au Nickel de diffuser vers le centre du tokamak, conformément aux observations expérimentales. Afin de valider l'hypothèse stochastique, et être sûrs que la diffusion obtenue dans le cas du modèle complet ne s'explique pas simplement par le fait que le travail fourni aux particules soit plus important que dans le cas intégrable, nous avons comparé la diffusion entre ce dernier cas et un modèle complet simplifié, puisque ne contenant plus que le mode (21) en guise de seule source de stochasticité. La figure 6.13 met en évidence le fait que l'augmentation de l'amplitude du mode (21) a bien plus d'impact que celle du mode (22) dans le cas intégrable, ce qui conforte l'hypothèse de la nécessité de rendre stochastiques les lignes de champ en vue d'observer une diffusion efficace, le cas intégrable, à énergie équivalente, n'arrivant jamais à reproduire les mêmes résultats, malgré une dépendance temporelle identique pour (21) et (22).

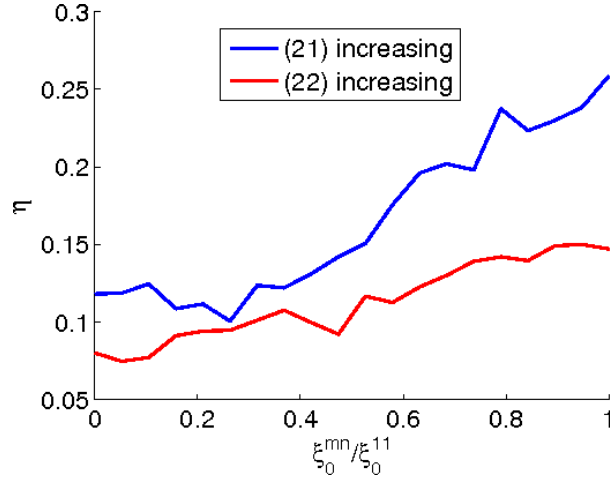


FIGURE 6.13 – Comparaison entre le cas intégrable et le cas stochastique de la valeur finale de η lorsque l'amplitude d'un des modes est amplifiée. Bien que la dépendance temporelle des modes (21) et (22) soit identique, l'effet de l'augmentation d'amplitude du mode (21) est bien plus visible que pour l'augmentation du (22), confirmant la nécessité d'une structure stochastique pour la diffusion du Nickel.

Finalement, bien que les particules de Nickel n'aient pas le temps d'effectuer plusieurs tours de tokamak, nous observons qu'elles diffusent efficacement vers le centre de l'enceinte de confinement dès lors que les modes stochastiques sont activés. Elles doivent en effet leur mouvement radial au champ électrique \mathbf{E}_1 généré par la perturbation magnétique. Sans ce dernier, la distribution finale des particules reste par ailleurs relativement proche de la configuration initiale.

6.2.4 Vitesse de dérive

Il est commun en physique des plasmas de définir la vitesse de dérive \mathbf{v}_d comme

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (6.2.16)$$

Dans le cas où les champs sont constants et uniformes, cette vitesse décrit exactement le mouvement de dérive du centre-guide, dû à la présence du champ électrique.

Afin de comprendre l'effet de ce champ électrique sur le mouvement des particules de Nickel, nous avons tracé les lignes de courant de dérive dans les deux cas, intégrable et stochastique. La figure 6.14, correspondant à une capture instantanée de la situation après environ $80\mu s$ d'évolution, met en évidence un point d'accumulation dans le cas stochastique, alors que les lignes de dérive gardent un aspect tout à fait régulier dans le cas intégrable.

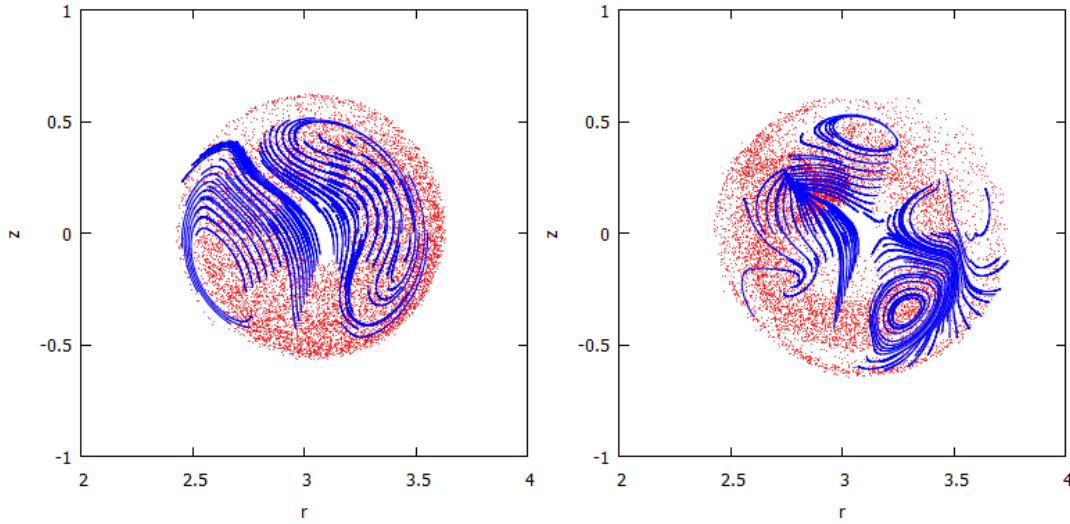


FIGURE 6.14 – À gauche, le tracé des lignes de courant de dérive dans le cas intégrable, avec en fond la distribution instantanée de particules de Nickel après environ $80\mu s$ de mouvement. Même chose à droite, au même instant, mais dans le cas du modèle complet. Notons l'existence d'un point d'accumulation, coïncidant bien avec une inhomogénéité locale de particules.

6.3 Conclusion

Au cours de cette étude, purement numérique, nous avons mis en évidence la possibilité pour le Nickel de diffuser rapidement vers le centre du tokamak, malgré sa masse conséquente et donc la faible distance qu’il parcourt durant un crash. Le rôle joué par la stochasticité des lignes de champ prend alors une autre tournure, au sens où c’est la structure du champ électrique induit qui conditionne le transport radial des ions Nickel.

Dans l’idéal, il nous faudrait accéder à une prédiction quantitative d’une telle diffusion. Nous allons nous intéresser dans la suite des travaux à une caractérisation des conditions initiales favorisant le mouvement radial du Nickel, et tenter de développer un modèle de diffusion effectif, faisant finalement le lien entre les perturbations magnétiques et les lignes de courant de dérive en résultant.

L’enjeu technologique associé à cette question est de taille. La problématique du transport d’impuretés ne se cantonne pas au simple débat d’idées et de modèles, mais se révèle d’une importance capitale pour la réalisation du futur réacteur ITER. Le dimensionnement de celui-ci fait que le régime de fonctionnement normal sera probablement fait de cycles de dents de scie, ce qui laisse présager de la possibilité de transport d’impuretés vers les zones de l’enceinte de confinement où se déroulera effectivement la fusion. Plus inquiétant encore, ces impuretés pourraient provenir de la structure même du tokamak. En effet, le *divertor*, pièce centrale du tokamak, constituant le “plancher” de l’enceinte de confinement, par lequel s’effectue l’extraction de l’énergie de fusion, est sujet à des contraintes de température telles qu’il voit le carbone dont il est constitué s’ablater et diffuser. La voie d’un *divertor* constitué de tungstène est aujourd’hui considérée comme une alternative viable au carbone, mais n’a pas encore testée en condition. Enfin, la compréhension précise des mécanismes de stochastisation du champ magnétique permettrait d’accéder au détail de l’instabilité dents de scie, et peut-être la contrôler sur ITER.

Schéma numérique d'intégration du HMF

Nos simulations numériques visant principalement à étudier le comportement aux temps longs du HMF, il nous a semblé être d'importance capitale d'utiliser un schéma numérique d'intégration exempt d'une dérive séculaire de l'énergie. Les schémas numériques préservant la 2-forme $dp \wedge dq$ sont connus sous le nom de "schémas symplectiques", et nous en présentons ici un d'ordre 4, utilisé pour toutes les simulations HMF.

Soit un Hamiltonien \mathcal{H} séparable en une partie cinétique et une partie potentielle, et notons q et p les coordonnées généralisées respectivement d'espace et de vitesse. Nous poserons

$$\mathcal{H} = T(q) + V(p). \quad (\text{A.1})$$

L'évolution des coordonnées généralisées $z = (q, p)$ s'écrit

$$\frac{dz}{dt} = \{z, \mathcal{H}\} = (D_T + D_V) z, \quad (\text{A.2})$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ représente le crochet de Poisson ($\{F, G\} = F_q G_p - F_p G_q$), et où nous avons introduit les opérateurs D_T et D_V par linéarité du crochet de Poisson ($D_T = \{\cdot, T\}$). L'intégration formelle de cette équation différentielle fournit

$$z(t) = \exp [t (D_T + D_V)] z(0). \quad (\text{A.3})$$

L'idée du schéma d'intégration est d'approximer cette solution formelle en décomposant l'exponentielle en un produit d'opérateurs connus sous la forme

$$\exp [t (D_T + D_V)] = \prod_{k=1}^n \exp (c_k t D_T) \exp (d_k t D_V) + o(t^{n+1}), \quad (\text{A.4})$$

où les ensembles de nombres $\{c_k\}$ et $\{d_k\}$ restent à trouver afin que la différence entre l'opérateur formel du membre de gauche soit bien approximé par le produit du membre de droite à la précision t^{n+1} près. Explicitons l'action de chaque opérateur, en remarquant que chaque facteur du produit de l'équation (A.4) agit sur une seule coordonnée de z (soit q , soit p). On a

$$\exp (c_k t D_T) = 1 + c_k t \{\cdot, T\} + o(t), \quad (\text{A.5})$$

$$\exp (d_k t D_V) = 1 + d_k t \{\cdot, V\} + o(t), \quad (\text{A.6})$$

D'où le produit

$$\exp(c_k t D_T) \exp(d_k t D_V) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + c_k t \frac{\partial T}{\partial p} \\ p - d_k t \frac{\partial V}{\partial q} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, connaissant les coefficients $\{c_k\}$ et $\{d_k\}$, nous obtenons le mapping suivant :

$$q_k = q_{k-1} + c_k t \frac{\partial T}{\partial p}(p_k), \quad (\text{A.8})$$

$$p_k = p_{k-1} - d_k t \frac{\partial V}{\partial q}(q_{k-1}), \quad (\text{A.9})$$

où l'on prendra bien soin d'évaluer la dérivée du potentiel V en q_k , ceci résultant de l'ordre dans lequel on choisira d'appliquer le produit d'opérateurs.

Relation entre fluctuations microcanoniques et canoniques

Nous allons établir dans cette annexe un résultat permettant de relier les fluctuations d'observables entre deux ensembles statistiques reliés entre eux par une transformation de Legendre. Nous suivrons pour ce faire la démarche proposée en référence [52].

Soit l'observable A . Sa valeur moyenne calculée dans un ensemble statistique défini par un ensemble de variables extensives $\mathbf{V} = \{V_i\}$ s'écrit

$$\langle A|\mathbf{V} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_e} \int A(\mathbf{R}) W(\mathbf{R}|\mathbf{V}) d\mathbf{R}, \quad (\text{B.1})$$

où W représente le poids statistique approprié à l'ensemble considéré, et où nous avons noté \mathcal{Z}_e la fonction de partition "extensive" normalisant la moyenne (B.1). Définissons au passage le potentiel thermodynamique associé $\Psi(\mathbf{V})$, qui vérifie donc

$$\mathcal{Z}_e = \int W(\mathbf{R}|\mathbf{V}) d\mathbf{R} = \exp[-\Psi(\mathbf{V})]. \quad (\text{B.2})$$

Supposons de plus que ce potentiel soit défini à la limite thermodynamique, c'est-à-dire que la limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Psi(\mathbf{V}) = \psi(\mathbf{v}) \quad (\text{B.3})$$

existe et soit finie. Effectuons à présent une transformation de Legendre, permettant d'exprimer les poids statistiques W en fonction de variables intensives $\mathbf{X} = \{X_i\}$ conjuguées aux V_i . Nous avons

$$W(\mathbf{R}|\mathbf{X}) = \int W(\mathbf{R}|\mathbf{V}) e^{-\mathbf{X} \cdot \mathbf{V}} d\mathbf{V}. \quad (\text{B.4})$$

La valeur moyenne de l'observable A s'écrit alors, dans cet ensemble,

$$\langle A|\mathbf{X} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_i} \int \langle A|\mathbf{V} \rangle e^{-\Psi(\mathbf{V})} e^{-\mathbf{X} \cdot \mathbf{V}} d\mathbf{V}, \quad (\text{B.5})$$

où nous avons défini la fonction de partition “intensive” \mathcal{Z}_i vérifiant

$$\mathcal{Z}_i = \exp [-\Psi(\mathbf{X})] = \int e^{-\Psi(\mathbf{V})} e^{-\mathbf{X} \cdot \mathbf{V}} d\mathbf{V}. \quad (\text{B.6})$$

À la limite thermodynamique, les arguments des exponentielles étant d’ordre N , il convient d’évaluer les intégrales par une méthode du col. En notant $\mathbf{V}^*(\mathbf{X})$ le vecteur de paramètres extensifs minimisant le potentiel thermodynamique $\Psi(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{V}) - \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}$, la moyenne (B.5) se développe alors sous la forme

$$\langle A|\mathbf{X} \rangle \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{\Psi(\mathbf{V}^*) + \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}^*} \times (\langle A|\mathbf{V}^* \rangle e^{-\Psi(\mathbf{V}^*) - \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}^*}), \quad (\text{B.7})$$

où la dépendance implicite en \mathbf{X} de \mathbf{V}^* a été omise afin d’alléger les notations. Finalement, à la limite thermodynamique les moyennes de l’observable A coïncident entre les ensembles \mathbf{X} et \mathbf{V} . Dans l’optique de prendre en compte les corrections intervenant dans le calcul des fluctuations, développons en série de Taylor la moyenne (B.7).

$$\langle A|\mathbf{X} \rangle = \langle A|\mathbf{V}^* \rangle + \sum_i \delta V_i \frac{\partial}{\partial \bar{V}_i} \langle A|\mathbf{V}^* \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta V_i \delta V_j \frac{\partial^2}{\partial \bar{V}_i \partial \bar{V}_j} \langle A|\mathbf{V}^* \rangle + \dots, \quad (\text{B.8})$$

où $\delta V_i = V_i - \bar{V}_i$, avec $\bar{V}_i = \langle V_i|\mathbf{X} \rangle$. δV_i représente donc l’écart de la valeur V_i par rapport à sa moyenne dans l’ensemble intensif. Cette égalité représente la correction aux premiers ordres en variables extensives de la *distribution de la moyenne* intensive. De plus, remarquons que

$$\langle V_i|\mathbf{X} \rangle = -\frac{\partial}{\partial X_i} \log \mathcal{Z}_i = -\frac{\partial \Psi(\mathbf{X})}{\partial X_i}. \quad (\text{B.9})$$

De la même façon, il vient

$$\langle \delta V_i \delta V_j|\mathbf{X} \rangle = \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{X})}{\partial X_i \partial X_j} = -\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial X_j}. \quad (\text{B.10})$$

En prenant la moyenne intensive de l’équation (B.8), les moyennes $\langle \delta V_i|\mathbf{X} \rangle$ s’annulent et il reste

$$\langle A|\mathbf{X} \rangle = \langle A|\mathbf{V}^* \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle \delta V_i \delta V_j|\mathbf{X} \rangle \frac{\partial^2}{\partial \bar{V}_i \partial \bar{V}_j} \langle A|\mathbf{V}^* \rangle + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (\text{B.11})$$

En injectant (B.10) dans (B.11), il vient

$$\langle A|\mathbf{V}^* \rangle = \langle A|\mathbf{X} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial X_j} \frac{\partial^2 \langle A|\mathbf{X} \rangle}{\partial \bar{V}_i \partial \bar{V}_j} \quad (\text{B.12})$$

$$= \langle A|\mathbf{X} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial X_i}{\partial \bar{V}_j} \frac{\partial}{\partial X_i} \langle A|\mathbf{X} \rangle. \quad (\text{B.13})$$

En appliquant cette formule aux fluctuations, nous obtenons finalement

$$\langle \delta A \delta B|\mathbf{V} \rangle = \langle \delta A \delta B|\mathbf{X} \rangle + \sum_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial \bar{V}_j} \frac{\partial \langle A|\mathbf{X} \rangle}{\partial X_i} \frac{\partial \langle B|\mathbf{X} \rangle}{\partial X_j}. \quad (\text{B.14})$$

Dans le cas du modèle HMF, où il est question de relier les fluctuations micro-canoniques aux fluctuations canoniques (qui sont, elles, aisément calculables), nous obtenons, en remplaçant directement $A = B = M$ dans (B.14)

$$\langle \delta M^2 \rangle_\mu = \langle \delta M^2 \rangle_c + \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \langle M \rangle_c}{\partial \beta} \right]^2. \quad (\text{B.15})$$

Calcul du temps moyen de premier passage

Nous établissons ici l'équation donnant le temps moyen de premier passage pour un processus stochastique unidimensionnel noté $\xi(t)$. Supposons ce dernier défini sur un domaine centré, dont les limites sont $\pm\lambda$, et posons $P(x, t|x_0, t_0)$ la probabilité pour une réalisation partant de x_0 à t_0 d'atteindre le point x au temps t . Notons enfin \mathcal{L}_{FP} l'opérateur de Fokker-Planck associé à la dynamique. Nous avons donc

$$\forall x \in]-\lambda, \lambda[, \frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}(x)P, \quad (\text{C.1})$$

$$P(x, t|x_0, t_0) = 0 \quad \text{pour } x = \pm\lambda. \quad (\text{C.2})$$

La probabilité $W(x_0, t)$ d'observer une réalisation partant de x_0 à t_0 et qui n'a pas encore atteint les bords à l'instant t est donnée par

$$W(x_0, t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} P(x, t|x_0, t_0) dx. \quad (\text{C.3})$$

La distribution du temps de premier passage $w(x_0, \tau)$ s'obtient donc par simple dérivation de la quantité précédente, à savoir

$$w(x_0, \tau) = -\frac{\partial W(x_0, \tau_e)}{\partial \tau}. \quad (\text{C.4})$$

Les moments de cette distribution s'expriment facilement,

$$\tau_n = \langle \tau^n \rangle = - \int_{-\lambda}^{\lambda} dx \int_{t_0}^{\infty} \tau^n \frac{\partial P}{\partial \tau}(x, \tau|x_0, t_0) d\tau, \quad (\text{C.5})$$

et de plus, on a

$$\int_{t_0}^{\infty} \tau^n \frac{\partial P}{\partial \tau}(x, \tau|x_0, t_0) d\tau = \left[n\tau^{n-1} \frac{\partial P}{\partial \tau^2} \right]_{t_0}^{\infty} - n \int_{t_0}^{\infty} \tau^{n-1} P(x, \tau|x_0, t_0) d\tau. \quad (\text{C.6})$$

En supposant que le terme de bord s'annule, l'application de l'opérateur \mathcal{L}_{FP} aux deux membres de l'équation (C.6) conduit à

$$\mathcal{L}_{FP} \left[\int_{t_0}^{\infty} \tau^n \frac{\partial P}{\partial \tau}(x, \tau|x_0, t_0) d\tau \right] = -n \int_{t_0}^{\infty} \tau^{n-1} \frac{\partial P}{\partial \tau}(x, \tau|x_0, t_0) d\tau. \quad (\text{C.7})$$

À ce stade, la dépendance en x de \mathcal{L}_{FP} rend le calcul impossible à finir. L'astuce est de remarquer que $P(x, t|x_0, t_0) = P(x, t_0|x_0, t_0 - t)$, et donc P obéit aussi à l'équation de Kolmogorov adjointe

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}^\dagger(x')P. \quad (\text{C.8})$$

En remplaçant \mathcal{L}_{FP} par son adjoint dans l'équation (C.7), on obtient, pour $n = 1$,

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger \langle \tau \rangle = -1. \quad (\text{C.9})$$

Il n'y a plus qu'à remplacer l'opérateur de Fokker-Planck adjoint par son expression en fonction du contexte et résoudre l'équation différentielle pour aboutir au temps moyen de premier passage.

Expression des champs perturbés

Le calcul des champs perturbés en MHD idéale se trouve au Chapitre 9 de la référence [89]. En décomposant le déplacement du plasma $\boldsymbol{\xi}$ dans une base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\eta, \hat{\mathbf{b}})$ dont le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{b}}$ suit les lignes de champ, nous avons

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_x \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_\eta + \xi_{||} \hat{\mathbf{b}}. \quad (\text{D.1})$$

La condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ permet d'exprimer la composante η en fonction du champ d'équilibre et de ξ_x . Pour chaque mode de perturbation, la composante associée s'écrit

$$\eta^{mn} = \frac{i}{(k_0^2)^{mn} Bx} \left[G^{mn} \frac{\partial}{\partial x} (x \xi_x^{mn}) - 2m\varepsilon B_\theta \xi_x^{mn} \right], \quad (\text{D.2})$$

où nous avons posé

$$G^{mn} = \frac{m}{x} B_\phi + n\varepsilon B_\theta, \quad (\text{D.3})$$

$$(k_0^2)^{mn} = n^2 \varepsilon^2 + \frac{m^2}{x^2}. \quad (\text{D.4})$$

Étant donné notre géométrie, le champ magnétique perturbé s'écrit, en notation complexe,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^{mn} = i \xi_x^{mn} \left[-n\varepsilon B_\phi + \frac{m}{x} B_\theta \right] \mathbf{e}_x - \left[i n \varepsilon B \eta^{mn} + \frac{\partial}{\partial x} (\xi_x^{mn} B_\theta) \right] \mathbf{e}_\theta \\ - \left[i \frac{m}{x} B \eta^{mn} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x \xi_x^{mn} B_\phi) \right] \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Le champ électrique s'écrit finalement, grâce à l'équation (6.2.3), sous la forme

$$\mathbf{E}_1^{mn} = -\frac{\partial \eta^{mn}}{\partial t} B \mathbf{e}_x - \frac{\partial \xi_x^{mn}}{\partial t} B_\phi \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \xi_x^{mn}}{\partial t} B_\theta \mathbf{e}_\phi. \quad (\text{D.6})$$

Bibliographie

- [1] L. Boltzmann. *Über die prinzipien der mechanik* (S. Hirzel, 1903).
- [2] A. Einstein. *Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen*. Ann. der Physik **322**, 549–560 (1905).
- [3] A. Einstein. *Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt*. Ann. der Physik **322**, 132–148 (1905).
- [4] A. Einstein. *Ist die trägheit eines körpers von seinem energieinhalt abhängig?* Ann. der Physik **323**, 639–641 (1905).
- [5] J. Perrin. *L'origine du mouvement brownien*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences **147**, 530–532 (1908).
- [6] J. Perrin. *L'agitation moléculaire et le mouvement brownien*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences **146**, 967–970 (1908).
- [7] E. Zermelo. *Ueber einestaz der dynamik und die mechanische wärmetheorie*. Ann. Phys. **293**, 485–494 (1896).
- [8] L. Boltzmann. *Entgegnung auf die wärmetheoretischen betrachtungen des hrn. e. zermelo*. Ann. Phys. **293**, 773–784 (1896).
- [9] E. Zermelo. *Ueber mechanische erklärungen irreversibler vorgänge. eine antwort auf hrn. boltzmann's "entgegnung"*. Ann. Phys. **295**, 793–801 (1896).
- [10] L. Boltzmann. *Zu hrn. zermelo's abhandlung "ueber die mechanische erklärung irreversibler vorgänge"*. Ann. Phys. **296**, 392–398 (1897).
- [11] H. Poincaré. *Réflexions sur la théorie cinétique des gaz*. J. Phys. Theor. Appl. **5**, 369–403 (1906).
- [12] R. W. Batterman. *Why equilibrium statistical mechanics works : universality of the renormalization group*. Philosophy of Science **65**, 183–208 (1998).

- [13] J. Bricmont. *Science of chaos or chaos in science ?* Physicalia Magazine **17**, 159 (1995).
- [14] J. L. Lebowitz. *Boltzmann's entropy and time's arrow*. Physics Today **46**, 32 (1993).
- [15] J. Gibbs, F. Cosserat, J. Rossignol, M. Brillouin and B. Diu. *Principes élémentaires de mécanique statistique*. Actualités scientifiques et industrielles (Editions Hermann, 1998). ISBN 9782705663414.
- [16] F. Spitzer. *Interaction of markov processes*. Adv. Math. **5**, 246 (1970).
- [17] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles* (Springer, 1991).
- [18] T. Liggett. *Interacting Particle Systems* (Springer, 1985).
- [19] J. Krug. *Boundary-induced phase transitions in driven diffusive systems*. Phys. Rev. Lett **67**, 1882 (1991).
- [20] B. Derrida. *An exactly soluble non-equilibrium system : The asymmetric simple exclusion process*. Phys. Rep. **301**, 65–83 (1998).
- [21] A. Lazarescu and K. Mallick. *An exact formula for the statistics of the current in the tasep with open boundaries*. J. Phys. A : Math. Theor. **44**, 315001 (2011).
- [22] M. Gorissen, A. Lazarescu, K. Mallick and C. Vanderzande. *Exact current statistics of the asymmetric simple exclusion process with open boundaries*. Phys. Rev. Lett. **109**, 170601 (2012).
- [23] V. Lecomte, C. Appert-Rolland and F. van Wijland. *Thermodynamic formalism for systems with markov dynamics*. J. of Stat. Phys. **127**, 51–106 (2007).
- [24] K. R. Yawn and B. N. Miller. *Incomplete relaxation in a two-mass one-dimensional self-gravitating system*. Phys. Rev. E **68**, 056120 (2003).
- [25] G. Rybicki. *Exact statistical mechanics of a one-dimensional self-gravitating system*. Astrophysics and Space Science **14(1)**, 56–72 (1971).
- [26] T. Tsuchiya, T. Konishi and N. Gouda. *Quasiequilibria in one-dimensional self-gravitating many-body systems*. Phys. Rev. E **50**, 2607–2615 (1994).
- [27] T. Tsuchiya, N. Gouda and T. Konishi. *Relaxation processes in one-dimensional self-gravitating many-body systems*. Phys. Rev. E **53**, 2210–2216 (1996).
- [28] K. R. Yawn and B. N. Miller. *Ergodic properties and equilibrium of one-dimensional self-gravitating systems*. Phys. Rev. E **56**, 2429–2436 (1997).
- [29] M.-C. Firpo and Y. Elskens. *Phase transition in the collisionless damping regime for wave-particle interaction*. Phys. Rev. Lett. **84**, 3318–3321 (2000).

- [30] M.-C. Firpo, F. Doveil, Y. Elskens, P. Bertrand, M. Poleni and D. Guyomarc'h. *Long-time discrete particle effects versus kinetic theory in the self-consistent single-wave model*. Phys. Rev. E **64**, 026407 (2001).
- [31] D. Gross. *Microcanonical thermodynamics and statistical fragmentation of dissipative systems. the topological structure of the n -body phase space*. Physics Reports **279(3-4)**, 119–201 (1997).
- [32] P. Hertel and W. Thirring. *A soluble model for a system with negative specific heat*. Annals of Physics **63(2)**, 520 – 533 (1971).
- [33] I. Ispolatov and E. Cohen. *On first-order phase transitions in microcanonical and canonical non-extensive systems*. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications **295(3-4)**, 475–487 (2001).
- [34] J. Bisquert, A. Zaban and P. Salvador. *Analysis of the mechanisms of electron recombination in nanoporous tio2 dye-sensitized solar cells. nonequilibrium steady-state statistics and interfacial electron transfer via surface states*. The Journal of Physical Chemistry B **106(34)**, 8774–8782 (2002).
- [35] H. Hofmann and F. A. Ivanyuk. *Mean first passage time for nuclear fission and the emission of light particles*. Phys. Rev. Lett. **90**, 132701 (2003).
- [36] P. Valageas. *Relaxation of a one-dimensional gravitational system*. Phys. Rev. E **74**, 016606 (2006).
- [37] M. Joyce and T. Worrakitpoonpon. *Relaxation to thermal equilibrium in the self-gravitating sheet model*. J. Stat. Mech. : Theory Exp. (2010).
- [38] E. Aurell, D. Fanelli and P. Muratore-Ginanneschi. *On the dynamics of a self-gravitating medium with random and non-random initial conditions*. Physica D **148**, 272 (2001).
- [39] D. Fanelli and E. Aurell. *Asymptotic behaviour of a stratified perturbation in a three dimensional expanding universe*. Astron. Astrophys. **395**, 399 (2002).
- [40] J. Miller. *Statistical mechanics of euler equations in two dimensions*. Phys. Rev. Lett. **65**, 2137–2140 (1990).
- [41] M.-H. Kiessling and Y. Wang. *Onsager's ensemble for point vortices with random circulations on the sphere*. Journal of Statistical Physics **148(5)**, 896–932 (2012).
- [42] F. Bouchet and A. Venaille. *Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows*. Physics Reports **515(5)**, 227 – 295 (2012).
- [43] M. Kac, G. Uhlenbeck and P. Hemmer. *On the van der waals theory of the vapor ?liquid equilibrium. i. discussion of a one ?dimensional model*. Journal of Mathematical Physics **4**, 216 (1963).

- [44] A. Campa, A. Giansanti, D. Mukamel and S. Ruffo. *Dynamics and thermodynamics of rotators interacting with both long- and short-range couplings*. Physica A **365**, 120 (2006).
- [45] A. Campa, A. Giansanti and D. Moroni. *Canonical solution of classical magnetic models with long-range couplings*. Journal of Physics A **36**, 6897 (2003).
- [46] A. Campa, T. Dauxois and S. Ruffo. *Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions*. Phys. Rep. **480**, 57–159 (2009).
- [47] V. Latora, A. Rapisarda and S. Ruffo. *Chaos and statistical mechanics in the hamiltonian mean field model*. Physica D **131**, 38–54 (1999).
- [48] F. Bouchet. *Stochastic process of equilibrium fluctuations of a system with long-range interactions*. Phys. Rev. E **70**, 036113 (2004).
- [49] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois and S. Ruffo. *Stability criteria of the vlasov equation and quasi-stationary states of the hmf model*. Physica A **337**, 36–66 (2004).
- [50] A. Campa, A. Giansanti and G. Morelli. *Long-time behavior of quasistationary states of the hamiltonian mean-field model*. Phys. Rev. E **76**, 041117 (2007).
- [51] M.-C. Firpo. *Analytic estimation of the lyapunov exponent in a mean-field model undergoing a phase transition*. Phys. Rev. E **57**, 6599–6603 (1998).
- [52] J. L. Lebowitz, J. K. Percus and L. Verlet. *Ensemble dependence of fluctuations with application to machine computations*. Phys. Rev. **153**, 250–254 (1967).
- [53] J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois and S. Ruffo. *Birth and long-time stabilization of out-of-equilibrium coherent structures*. Eur. Phys. J. B **29**, 577–591 (2002).
- [54] J. R. Treichler. *Ph.D. Dissertation*. Ph.D. thesis, Stanford University (1977).
- [55] E. P. Wigner. *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*. Ann. of Math. **62**, 548–564 (1955).
- [56] Z. Füredi and J. Komlòs. *The eigenvalues of random symmetric matrices*. Combinatorica **1**, 233–241 (1989).
- [57] D. Lynden-Bell. *Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems*. MNRAS **136**, 101 (1967).
- [58] E. P. Hubble. *Extragalactic nebulae*. ApJ **64**, 321–369 (1926).
- [59] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic dynamics* (Princeton, NJ : Princeton University Press, 1987).
- [60] A. Gabrielli, M. Joyce and B. Marcos. *Quasistationary states and the range of pair interactions*. Phys. Rev. Lett. **105**, 210602 (2010).

- [61] G. Severne and M. Luwell. *Astrophys. Space Sci.* **122**, 299 (1986).
- [62] P. Mineau, M. R. Feix and J. L. Rouet. *Numerical simulations of violent relaxation and formation of phase space holes in gravitational systems.* *Astron. Astrophys.* **228**, 344–349 (1990).
- [63] P.-H. Chavanis. *Lynden-bell and tsallis distributions for the hmf model.* *Eur. Phys. J. B* **53**, 487–501 (2006).
- [64] M.-C. Firpo, F. Leyvraz and G. Attuel. *Equilibrium statistical mechanics for single waves and wave spectra in langmuir wave-particle interaction.* *Phys. Plasmas* **13**, 122302 (2006).
- [65] V. Latora, A. Rapisarda and C. Tsallis. *Non-gaussian equilibrium in a long-range hamiltonian system.* *Phys. Rev. E* **64**, 056134 (2001).
- [66] V. Latora, A. Rapisarda and S. Ruffo. *Chaos and statistical mechanics in the hamiltonian mean field model.* *Phys. Rev. E* **64**, 056134 (2001).
- [67] A. Pluchino *et al.* *Dynamical anomalies and the role of initial conditions in the hmf model.* *Physica A* **338**, 60–67 (2004).
- [68] A. Pluchino, V. Latora and A. Rapisarda. *Metastable states, anomalous distributions and correlations in the hmf model.* *Physica D* **193**, 315–328 (2004).
- [69] D. H. Zanette and M. A. Montemurro. *Dynamics and nonequilibrium states in the hamiltonian mean-field model : A closer look.* *Phys. Rev. E* **67**, 031105 (2003).
- [70] M. Antoni and S. Ruffo. *Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics.* *Phys. Rev. E* **52**, 2361–2374 (1995).
- [71] H. Morita and K. Kaneko. *Collective oscillation in a hamiltonian system.* *Phys. Rev. Lett.* **96**, 050602 (2006).
- [72] N. G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry* (2007).
- [73] P.-H. Chavanis. *Kinetic theory of long-range interacting systems with angle-action variables and collective effects.* *Physica A* **391**, 3680 (2012).
- [74] R. Bachelard, C. Chandre, D. Fanelli, X. Leoncini and S. Ruffo. *Abundance of regular orbits and nonequilibrium phase transitions in the thermodynamic limit for long-range systems.* *Phys. Rev. Lett.* **101**, 260603 (2008).
- [75] H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* *Acta Mathematica* **13**, 1–270 (1889).
- [76] M. Kac. *Some remarks on the use of probability in classical statistical mechanics.* *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* **42**, 356 (1956).
- [77] J. R. Dorfman. *An Introduction to Chaos in Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, 1999).

- [78] S. Adams. *Lectures on mathematical statistical mechanics* **A(30)** (2006).
- [79] K. Mallick. *Influence of the noise spectrum on the anomalous diffusion in a stochastic system*. Phys. Rev. E **80**, 011124 (2009).
- [80] A. Figueiredo, T. M. Rocha Filho, A. E. Santana and M. A. Amato. *Scaling of the dynamics of homogeneous states of one-dimensional long-range interacting systems*. arXiv :1305.4417 (2013).
- [81] T. M. Rocha Filho, A. E. Santana, J. R. S. Moura, M. A. Amato and A. Figueiredo. *Dynamics and physical interpretation of quasi-stationary states in systems with long-range interactions*. arXiv :1305.2903 (2013).
- [82] J. A. Wesson, B. Alper, A. W. Edwards and R. D. Gill. *Transport in the sawtooth collapse*. Phys. Rev. Lett. **79**, 5018–5021 (1997).
- [83] B. M. Andreev. *Separation of hydrogen isotopes in h2o-h2s systems*. Sep. Sci. and Tech. **36**, 1949–1989 (2001).
- [84] M. Keilhacker *et al.* *High fusion performance from deuterium-tritium plasmas in jet*. Nucl. Fusion **39(2)**, 209 (1999).
- [85] J. D. Lawson. *Some criteria for a power producing thermonuclear reactor*. Proc. Phys. Society B **70**, 6 (1957).
- [86] N. Fedorczak. *Ph.D. Dissertation*. Ph.D. thesis, Université de Provence - Aix-Marseille 1 (2010).
- [87] R. White. *The theory of toroidally confined plasmas* (Imperial College Press, 2006). ISBN 9781860946394.
- [88] J.-M. Rax. *Physique des Tokamaks* (Les éditions de l'École Polytechnique, 2011).
- [89] J. P. Freidberg. *Ideal Magneto-Hydrodynamics* (New York : Plenum, 1987).
- [90] R. Farengo, H. E. Ferrari, P. L. García-Martínez, M.-C. Firpo, W. Ettoumi, and A. F. Lifschitz. *Redistribution of high energy alpha particles due to sawteeth with partial reconnection*. Nucl. Fus. **53(4)**, 043012 (2013).
- [91] R. Farengo, H. E. Ferrari, M.-C. Firpo, P. L. García-Martínez and A. F. Lifschitz. *Alpha particle redistribution due to experimentally reconstructed internal kink modes*. Plasma Phys. Control Fusion **54**, 025007 (2012).
- [92] S. von Goeler, W. Stodiek and N. Sauthoff. *Studies of internal disruptions and $m = 1$ oscillations in tokamak discharges with soft—x-ray techniques*. Phys. Rev. Lett. **33**, 1201–1203 (1974).
- [93] A. W. Edwards, D. J. Campbell, W. W. Engelhardt, H. U. Fahrback, R. D. Gill, R. S. Granetz, S. Tsuji, B. J. D. Tubbing, A. Weller, J. Wesson and D. Zasche. *Rapid collapse of a plasma sawtooth oscillation in the jet tokamak*. Phys. Rev. Lett. **57**, 210–213 (1986).

- [94] M. N. Rosenbluth, R. Y. Dagazian and P. H. Rutherford. *Nonlinear properties of the internal $m = 1$ kink instability in the cylindrical tokamak*. Phys. Fluids p. 1894 (1973).
- [95] B. B. Kadomtsev. Sov. J. Plasma Phys. **1**, 389 (1975).
- [96] F. Porcelli, D. Boucher and M. N. Rosenbluth. *Model for the sawtooth period and amplitude*. Plasma Phys. Control. Fusion **38**, 2163 (1996).
- [97] V. Igoshine, O. Dumbrajs, H. Zohm and A. Flaws. *Stochastic sawtooth reconnection in asdex upgrade*. Nucl. Fus. **47**, 23 (2007).
- [98] I. Pavlenko, B. Rapoport, B. Weyssow and D. Carati. *Hamiltonian mapping of magnetic reconnection during the crash stage of the sawtooth instability*. Phys. of Plasma **10**, 1083 (2003).
- [99] V. Igoshine *et al.* *Stochastization as a possible cause for fast reconnection during mhd mode activity in the asdex upgrade tokamak*. Nucl. Fusion **46**, 741 (2006).
- [100] Y. Zhao and R. B. White. *Simulation of alpha-particle redistribution due to sawteeth on the tokamak fusion test reactor*. Phys. Plasmas **4**, 1103 (1997).
- [101] D. Pasini *et al.* *Measurements of impurity transport in jet*. Plasma Phys. Control. Fusion **34**, 677 (1992).

Publications

Revue à comité de lecture

- W. Ettoumi, M.-C. Firpo, R. Farengo, H. E. Ferrari, P. L. García-Martínez, A. F. Lifschitz, **Test of the stochastic origin of sawtooth crashes**, Physical Review Letters, *submitted*.
- M.-C. Firpo, W. Ettoumi, R. Farengo, H. E. Ferrari, P. L. García-Martínez, A. F. Lifschitz, **Development of magnetohydrodynamic modes during sawteeth in tokamak plasmas**, Physics of Plasmas, *à paraître*.
- W. Ettoumi, M.-C. Firpo, **Action diffusion and lifetimes of quasistationary states in the Hamiltonian mean-field model**, Physical Review E **87** 030102(R) (2013).
- R. Farengo, H. E. Ferrari, P. L. García-Martínez, M.-C. Firpo, W. Ettoumi, A. F. Lifschitz, **Redistribution of high energy alpha particles due to sawteeth with partial reconnection**, Nuclear Fusion **53**, 043012 (2013).
- W. Ettoumi, M.-C. Firpo, **Stochastic treatment of finite- N effects in mean-field systems and predictions on the lifetimes of coherent structures**, Physical Review E **84**, 030103(R) (2011).
- W. Ettoumi, M.-C. Firpo, **Linear theory and violent relaxation in long-range systems : a test case**, Journal of Physica A : Mathematical and Theoretical **44**, 175002 (2011).

Actes de conférences

- W. Ettoumi and M.-C. Firpo, *Chaos, Complexity and Transport, Proceedings of the CCT'11*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2012.

